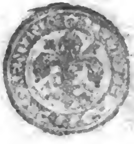
L. EULERI
OPUSCULA
VARII ARGUMENTI.





BEROLINI.

Sumtibus Ambr. Haude & Jo. Carol. Speneri, Bibliop.
Reg. & Acad. Scient. privil. 1746.

De Motu Corporum

in superficiebus mobilibus.

§. I.

Argumentum, quod hic explicare constitui, ad partem mechanicæ adhuc parum tractatam & cognitam pertinet. Non ita pridem enim primum inter Celeberrimos Bernoullios Patrem & Filium quæstio de descensu corporis super plano inclinato secundum horizontalem directionem mobili est agitata, eaque primo intuitu ita videbatur difficilis & abscondita, ut prima motus principia, quibus alias universa mechanica, quatenus quidem est cognita, superstrui solet, ei enodandæ vix sufficere viderentur. Ab hoc tempore Celeberrimus Clairaut istam novam mechanicæ partem mirifice amplificavit, dum motum quoque tam unius quam plurium Tab. I, II, III, & IV.

corporum ſuper plano circa datum axem fixum mobili definivit; atque idem me per litteras excitavit, ut in eodem genere vires meas experirer. Quod negotium cum ſuscepiſſem, præcipue in hoc elaboravi, ut hujusmodi problematum ſolutiones ex primis mechanicæ principiis inveſtigarem, neque ad has principiis inde demum derivatis, cujusmodi eſt conſervatio virium vivarum, uterer; non quaſi hujus principii veritatem in dubium vocarem, ſed potius ut conſenſu mearum ſolutionum cum iis, quæ ex principio iſto ſint deductæ, ejus veritas etiam illis, qui adhuc de eo dubitant, pleniſſime confirmaretur. Tum vero ſæpe occurrunt caſus, quibus hoc principium alias utiliſſimum, omni uſu ad ſolutionem obtinendam caret, cum contra prima mechanicæ principia, ſi recte adhibeantur, ſemper ad ſolutionem perducere debeant.

§. II. Quando in mechanica motus corporis ſuper linea quacunque immobili determinatur, præter celeritatem, quam corpus in ſingulis punctis habet, preſſio quoque, quam linea illa ab eo ſuſtinet, asſignari debet, cujus directio ſemper ad lineam iſtam eſt normalis. Cognita ergo hac presſione, ſi linea illa, ſuper qua fit motus, ſubito immobilis eſſe ceſſaret, ea ipſa ab iſta presſione ad motum impelli deberet, pro ratione ejus maſſæ & loci, ubi ſollicitatur. Quanquam enim hic linea tantum, ſuper qua corpus moveatur, conſideratur, tamen hoc fit ſolum ad ſuperfluas notiones removendas. Quomodocunque enim corpus, ſuper quo alterum movetur, ſit cum ratione molis tum figuræ comparatum, quoniam

niam tantum linea illa in ejus superficie, secundum quam alterum corpus incedit, in computum ingreditur, hæc sola linea, tanqvam a reliqua mole seorsim existeret, spectari solet; siquidem hoc corpus, super quo alterum movetur, est immobile. Statim autem, atque hæc immobilitas tollitur, ita ut pressio ante memorata effectum exerere possit; tum utique præter lineam, quam alterum corpus in ejus superficie describit, tota corporis massa spectari, ex ejusque ad pressionem habitu motus in eo genitus inquiri debet. Perspicuum autem est, ut primum hoc corpus moveri incipiat, motum alterius corporis e vestigio mutari oportere, propterea quod positio illius lineæ, quam motus sequitur, continuo mutetur. Hinc autem vicissim pressio aliam atque aliam tam directionem quam quantitatem consequitur, unde motus utriusque corporis novas perturbationes patitur, ex quibus summa difficultas hujusmodi motus implicatos ad certas leges revocandi, non mediocriter elucet.

§. III. Duo igitur hic corpora considerantur, quorum alterum super alterius superficie incedat & moveatur: atque cum in mechanica elementari, ubi alterum corpus, super quo fit motus, immobile statuitur, alterum corpus tanquam punctum considerari soleat, quo motuum diversitas, quæ alioquin in ejus partibus inesse posset, tollatur, in præsenti investigatione, quæ per se est longe difficilior, multo magis idem hoc corpus, quod in superficie alterius movetur, tanquam infinite parvum seu ad minimum ita comparatum assumi conveniet, ut in eo dum movetur, nullus motus vertigi-

tiginis inesse possit; seu quod eodem redit, corpus istud ejusmodi concipiemus, ut singulæ ejus partes quovis momento motibus æqualibus secundum communem directionem ferantur. Præterea quoque horum amborum corporum unicum contactus punctum contemplabimur, quod in superficie corporis, super quo alterum movetur, eam lineam, secundum quam alterum ingredi censetur, describat. Linea hæc quatenus in superficie corporis extat, data ponitur eritque vel recta vel curva: hinc superficies corporis secundum hanc lineam instar canalis excavata concipiatur, ut corpus alterum, etiamsi fortasse vires urgeant, de hac via deflectere nequeat. Imprimis vero ne hæc duo corpora a se invicem digredi queant, commode via illa tanquam tubus repræsentatur, in quo alterum corpus ita sit inclusum, ut aliter nisi secundum ipsam tubi directionem moveri non possit. Hoc modo Celeb. Clairaut sua problemata proposuit, ut corporis tubo inclusi motus, dum ipse tubus est mobilis, definiri debeat; quare hanc ideam ad præsens institutum maxime accommodatam eo magis retinebo, quod omnia corpora, in quorum superficie semita quasi est designata, ad hanc ideam revocari possint.

§. IV. Omnes ergo quæstiones, quæ in hoc genere proponi possunt, in hoc problemate latissime patente comprehenduntur. Si habeatur tubus cujuscunque figuræ utcunque mobilis, in eoque inclusum sit unum plurave corpora, quæ cum motu quovis insito moveri cœperint, tum vero a viribus externis quibuscunque continuo sollicitentur, determinare ad quodvis tempus tam situm tubi cum cor-

pori-

poribus ipsi inclusis, quam singulorum motum una cum pressione corporum in latera tubi: adjici insuper posset hæc conditio, ut ipse quoque tubus interea a viribus externis urgeatur. Verum multitudo hujusmodi circumstantiarum, etsi expeditio calculi iis sæpenumero tantopere impediatur, ut ad finem perduci nequeat, tamen plerumque ipsam methodum solvendi non admodum afficit. Methodus enim, quam hic sum traditurus, ita est comparata, ut vires sollicitantes, quomodocunque etiam se habeant, in applicatione methodi nullam moram injiciant; unde consideratio virium sollicitantium problema solutu non difficilius reddere censenda erit. Majus autem discrimen affert figura tubi, quæ cum vel recta vel curva vel etiam duplici curvatura prædita esse possit, solutio inde maxime diversa resultat, ac duplicem quidem curvaturam, ob summam calculi tam difficultatem quam prolixitatem, hic penitus prætermitto. Non minor differentia deprehenditur in numero corporum tubo inclusorum; pluralitatem enim eorum, præsertim si tubus sit incurvatus, maximum afferre impedimentum, per se satis est perspicuum, quamobrem in tubis tantum rectis plura corpora admittemus, in curvis autem unicum duntaxat inclusum assumemus.

§. V. Maxime autem problematis indoles a ratione mobilitatis tubi pendet, quæ infinitis modis variari potest: unde tria potissimum mobilitatis genera contemplabimur, cum reliqua plerumque ex his sint mixta, eoque revocari possint. Primum igitur tubum secundum unicam directionem motu sibi parallelo mobilem statuemus; hocque idcirco

casu, nisi tubus quiescat, singulæ ejus partes æqualibus celeritatibus secundum eandem directionem constantem progredientur. Huc pertinebat prima hujus naturæ quæstio a Celeb. Bernoullio tractata, quo motum corporis super plano inclinato secundum horizontalem directionem mobili definivit; tubus enim hic plano inclinato affixus est concipiendus, & quia planum nonnisi horizontaliter promoveri posse assumitur, tubus alium motum præter horizontalem recipere nequit. Ad secundum genus ea referemus problemata, in quibus tubus circa axem fixum motu angulari mobilis ponitur; hujus generis sunt omnia problemata a Celeberrimo Clairaut soluta, quibus motum unius pluriumve corporum tali tubo circa axem fixum mobili inclusorum determinavit. Complectitur quidem hoc secundum genus in se primum, quippe quod ex eo oritur, si axis ille fixus ad distantiam infinitam remotus statuatur; verum tamen hæc differentia satis est notabilis, ut hæc duo genera seorsim pertractentur. Tertium denique genus eos continebit casus, quibus tubus liberrime mobilis constituitur, ita ut secundum omnes directiones, quocunque vires sollicitantes urgeant, cedere possit; qui casus præ reliquis solutu difficillimus videtur, neque etiam a quoquam, qui binos præcedentes consideraverunt, est solutus; unde meam solutionem, quam sum traditurus, pro nova venditare non dubito. Ob tres igitur istos commemoratos casus dissertatio mea in tres sectiones dividetur.

Sectio

Sectio I.

De motu corporum in tubis, qui motu ſibi parallelo ſecundum datam directionem ſunt mobiles.

§. VI.

Quoniam in hac inveſtigatione quantitates diverſiſſimæ naturæ, maſſæ ſcilicet corporum, vires ſollicitantes, celeritates, tempora & ſpatia in computum ingrediuntur, ante omnia explicari conveniet, quo pacto ſingulas deſignare atque exprimere velimus. Ac primo quidem cum maſſa ſeu quantitas materiæ in quovis corpore contentæ proportionalis ſit ipſius ponderi, quod idem corpus circa ſuperficiem terræ conſtitutum eſſet habiturum, maſſam cujusque corporis hic per pondus ejusdem exprimemus. Si igitur corpus, quod contemplamur, revera prope terræ ſuperficiem verſetur, ejus maſſa & pondus eadem littera denotabitur, ſin autem corpus extra terram conſideretur, ejus maſſa æqualis cenſebitur ponderi, quod idem corpus, ſi prope terram collocaretur, habere deberet. Cum autem gravitas non ubique terrarum eadem obſervetur, ſed minor ſit prope æquatorem quam circa polos, ſuperior determinatio ad certam terræ regionem erit adſtringenda, talem ſcilicet ubi gravitas per accuratiſſima experimenta eſt explorata, eo quod deinceps menſuram celeritatum ex iisdem experimentis ſumus petituri. Si igitur maſſam cujuspiam corporis lit-

tera

tera A designabimus, hæc littera A simul exprimet quantitatem ponderis, quod idem corpus, si in præfata terræ regione collocaretur, esset habiturum. Quia autem variatio gravitatis per universam terram nunc quidem satis est cognita, ista restrictio, siquidem corpus alibi ponderetur, facile instituitur.

§. VII. Deinde vires quasvis sollicitantes, seu uti vocari solent, motrices, ut a viribus acceleratricibus distinguantur, commodissime per pondera explicabimus. Cum enim omnes vires & pondera sint quantitates homogeneæ, proposita quacunque vi sollicitante semper assignari poterit pondus isti vi æquale. Hoc igitur recepto designandi modo massæ & vires nobis erunt quantitates homogeneæ. Quare cum vis acceleratrix prodeat, si vis motrix seu sollitans per massam corporis, quod urget, dividatur, manifestum est vires acceleratrices nobis per meros numeros expressum iri: sic quia corporis in regione terræ constituti tam massa, quam vis id deorsum urgens, quæ cum ejus pondere congruit, eadem littera denotetur, vis acceleratrix inde oriunda per unitatem exprimetur, atque si vis quodcunque corpus sollicitans vel major sit vel minor quam pondus, quod istud corpus prope terram constitutum habiturum esset, tum vis ejus acceleratrix tantumdem major vel minor erit unitate.

§. VIII. Quod ad celeritates attinet, nulla certior atque ad pleraque problemata mechanica solvenda accommodatior mensura videtur, quam quæ ex altitudine, unde corpus in nostris regionibus cadens eandem acquirit celeritatem, petitur; quia hinc simul facillime colligitur, quantum spatium quævis

quævis celeritas dato tempore veluti uno minuto ſecundo conficere valeat: Quia enim tempora, quibus corpus libere labendo ex variis altitudinibus deſcendit, rationem ſubduplicatam harum ipſarum altitudinum tenent, atque celeritas ex hujusmodi lapſu acquiſita tanta eſt, ut eodem tempore, quo lapſus duravit, motu uniformi ſpatium duplæ altitudini æquale percurrere valeat; ſi per unicum experimentum celeritas, quam corpus ex data altitudine delapſum nançiſcitur, fuerit cognita, omnes quoque celeritates, quæ ex aliis altitudinibus oriuntur, definiri poterunt. Ad hoc autem ob variabilitatem gravitatis certa terræ regio eſt eligenda, quæ eadem ad menſuram maſſarum ante indicatam ſtabiliendam eſt adhibenda. Ex experimentis autem ſub eadem fere, ubi habitamus, poli elevatione, Londini ſcilicet & Pariſiis inſtitutis corpus grave uno minuto ſecundo per altitudinem 15,625 pedum rhenanorum delabi colligitur, quam menſuram eo libentius retinemus, quod iſte numerus ſit quadratus, ejusque radix quadrata in hoc calculo frequentiſſime occurrat. Corpus ergo ex altitudine 15,625 ped. Rh. tantam aſſequitur celeritatem, qua tempore unius minuti ſecundi ſpatium 31,25 ped. uniformiter percurrere poſſit. Hinc ſi corpus ex quavis alia altitudine, puta b ped., delabatur, celeritatem acquiret, quæ ſe habebit ad illam, ut $\sqrt{b}$ ad $\sqrt{15,625}$ hoc eſt, ut $\sqrt{1000b} : 125$ unde hac celeritate abſolvetur uno minuto ſecundo ſpatium $\frac{31,25}{125}\sqrt{1000b} = \frac{1}{4}\sqrt{1000b}$ ped. Rh. Quanquam ergo altitudo, ex qua celeritas quæpiam generatur,

non ipſa huic celeritati eſt proportionalis, ſed ejus radix quadrata, tamen aptiſſime celeritatis quantitatem definit; atque idcirco in poſterum loco celeritatum altitudines ipſis debitas in computum introducemus, ſicque celeritates per radices quadratas ex altitudinibus ipſis debitis exprimemus.

§. IX. Quo autem magnitudinem hujus pedis Rhenani, quo hic uti conſtituimus, accuratius definiamus, quoniam ejus menſura apud omnes auctores non ſatis certa & fixa videtur, ejus relationem ad pedem regium pariſinum, qui conſtantiſſimæ menſuræ conſervatur, indagare debemus. Obſervata autem eſt longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis 3 pedum pariſin. & $8\frac{5}{9}$ linearum, quarum 144 unum pedem conficiunt; ita ut iſta penduli longitudo ſit $= \frac{3965}{1296}$ ped. Pariſ. Si jam altitudo, ex qua grave uno minuto ſecundo delabitur, ponatur n hujusmodi pedum, atque π denotet circumferentiam circuli cujus diameter $= 1$, ita ut ſit $\pi = 3,14159265$, erit 1 ad $\pi\pi$ uti longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis ad duplam altitudinem, per quam grave uno minutó ſecundo delabitur. Hinc ergo erit $n = \frac{3965}{2592}\pi\pi = 15,0976$ ped. pariſ. ex quo pes noſter rhenanus ſe habet ad pedem pariſinum ut 15,0976 ad 15,625, ſeu ut 1000 ad 1034,93, quæ proportio proxime ad communem pedis rhenani menſuram accedit, vulgo enim is ad pariſinum ſtatui ſolet ut 1000 ad 1035. Si ergo, ut fieri ſolet, pes rhenanus in mille particulas

æqua-

æquales dividatur, harum particularum 1034, 93 conſtituent pedem pariſinum. Ex pede autem pariſino, qui in 1440 ſcrupula, quæ ſunt decimæ linearum partes, dividi ſolet, formabitur pes rhenanus ſumendis 1391,395 ſcrupulis. Quoniam igitur omnium reliquorum pedum relatio ad pariſinum conſtat, ii quoque facile ad pedem noſtrum rhenanum reducentur.

§. X. Temporis quidem dimenſio per ſe eſt clariſſima, cum horæ & minuta tam prima quam ſecunda ſint menſuræ notisſimæ & conſtantisſimæ; verumtamen in præſenti negotio alia menſura cum menſuris præcedentium quantitatum homogenea uti conveniet; quæ tamen ita ſit comparata, ut in priorem, minuta ſcilicet ſecunda, facile converti poſſit. Retinebimus nempe uſitatisſimum in mechanicis modum, quo tempus ſpatio per celeritatem diviſo exprimi ſolet; locum quidem hæc exprimendi ratio proprie tantum habet in motu uniformi, ſed cum minima ſpatii elementa ſingula perpetuo motu æquabili percurri aſſumantur, per calculum integralem ad omnes motus extenditur. Ponamus igitur ſpatium a celeritate, quæ ſit debita altitudini b uniformiter deſcribi abſolvique tempore t, quoniam celeritatem ipſam per $\sqrt{b}$ exponimus, erit tempus $t = \frac{a}{\sqrt{b}}$, quæ quidem expreſſio $\frac{a}{\sqrt{b}}$ utique tempori t eſt proportionalis. Ut autem hinc tempus in minutis ſecundis exhiberi poſſit, totum negotium unica obſervatio conficiet. Ex ante allega-

tis scilicet constat, celeritate, quæ ex lapsu per altitudinem 15, 625 ped. rh. gignitur, uno minuto secundo spatium 31, 25 ped. rh. absolvi, hoc ergo casu fit $a = 31, 25$ & $b = 15, 625$, unde erit tempus $t = \frac{31, 25}{\sqrt{15, 625}}$, quod cum sit unum minutum secundum, generatim erit $\frac{31, 25}{\sqrt{15, 625}}$ ad 1'' uti expressio similis temporis cujusvis $t = \frac{a}{\sqrt{b}}$ ad numerum minutorum secundorum. Quare si fuerit tempus nostro notandi modo $t = \frac{a}{\sqrt{b}}$, erit hoc tempus $= \frac{\sqrt{15, 625}}{31, 25} \cdot \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{125\, a}{31, 25 \sqrt{1000 b}}$ $= \frac{4a}{\sqrt{1000 b}}$ minutorum secundorum, si quidem a & b in pedibus rhenanis exprimentur. Vel si sit $t = \frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{c}$, erit hoc tempus $= \frac{\sqrt{10 c}}{25}$ min. sec. dummodo linea c in pedibus rhenanis exprimatur.

§. XI. Hoc igitur modo tam tempora quam celeritates per radices quadratas ex quapiam longitudine exponuntur; atque productum ex celeritate in tempus dabit ipsum spatium, quod corpus hac celeritate uniformiter motum isto tempore percurrit. Cum igitur in motu uniformi ex spatio & celeritate tempus determinetur, ita vicissim ex spatio & tempore corporis celeritas innotescet. Sic si tempore t uniformiter descriptum sit spatium $= a$, erit corporis celeritas $= \frac{a}{t}$; atque altitudo celeritati debita $= \frac{aa}{tt}$; Quodsi ergo tempus

pús in minutis secundis detur, inde primum idonea nostraque instituto conformis expressio est investiganda, quæ loco t substituatur. Ponamus tempus propositum esse n''; atque temporis expressionem ad nostrum scopum accommodatam esse $t = \sqrt{c}$, erit, uti ante vidimus, si c in pedibus rhenanis exprimatur, $n = \frac{\sqrt{10c}}{25}$, ideoque $\sqrt{c} = \frac{25n}{\sqrt{10}}$; & $c = 62{,}5\,nn = \frac{125\,nn}{2} = \frac{1000\,nn}{16}$. Hic scilicet numerus $\frac{1000\,nn}{16}$ longitudinem c in pedibus rhenanis exhibebit, qua cognita erit $\sqrt{c} = t$. Simili modo si celeritas per numerum pedum rhen. qui uno minuto secundo percurrantur, detur, hinc idonea expressio in calculum introducenda eruetur. Conficiat ista celeritas uno minuto secundo m pedes rh. sitque altitudo huic celeritati debita $= b$, cujus magnitudo in pedibus rhen. inveniri debeat. Quia igitur ex iis, quæ ante sunt tradita, est $\frac{1}{4}\sqrt{1000\,b} = m$, fiet $\sqrt{b} = \frac{4m}{\sqrt{1000}}$, quæ est apta expressio pro celeritate adhibenda: ipsa vero altitudo huic celeritati debita est $= b = \frac{16\,mm}{1000}$, qui numerus altitudinem b in pedibus rhenanis expressam præbebit.

§. XII. Ut nunc effectum virium sollicitantium in motu cujusque corporis perturbando explicemus, quoniam ideas præcedentes omnes ex descensu gravium libero hausimus, primum hunc ipsum descensum secundum has ideas perpendamus. Delabatur igitur corpus secundum rectam vertica- *Tab. I. Fig. I.*

 lem

lem in medio non resistente, & quidem in A motum ex quiete inchoaverit. Sit massa corporis $= A$, quæ cum ponderi ejusdem corporis æqualis statuatur, erit quoque vis hoc corpus deorsum urgens $= A$, ideoque vis acceleratrix, quam præbet vis motrix per massam divisa $= 1$. Elapso tempore t pervenerit hoc corpus in P, sitque altitudo $AP = x$, & celeritas in P acquisita sit debita altitudini $= v$, erit utique $v = x$. Jam elemento temporis dt corpus ulterius descendat per spatiolum $Pp = dx$, erit altitudo debita celeritati in $p = v + dv$, quæ cum congrüat cum ipsa altitudine $Ap = x + dx$, erit $dv = dx$. Efficitur autem hoc incrementum dv a vi acceleratrice, quæ quoties unitate exprimitur, incrementum dv perpetuo æquale erit elemento spatii percursi dx. Porro cum elementum $Pp = dx$ motu uniformi percurratur, erit $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, unde integrando fit $t = 2\sqrt{x}$. Seu quia est $t = \frac{2x}{\sqrt{x}}$, manifestum est celeritate $\sqrt{x}$ & eodem tempore t per motum uniformem spatium $= 2x$ hoc est duplæ altitudini AP æquale descriptum iri, uti Galilæus demonstravit. Ceterum hic ipsa prima mechanicæ principia tanquam cognita sumimus, eorum autem applicationem ad corpora diversimode mobilia, quando opus erit, seorsim demonstrabimus.

§. XIII. Maneat ut ante corporis, quod secundum rectam AB promovetur, massa $= A$, & confecto spatio $AP = x$, sit ejus celeritas in P debita altitudini $= v$, in P autem urgeatur

geatur secundum directionem motus PB vi $= P$, qua ejus celeritas ac propterea altitudo v augeatur. Jam puncto temporis dt procedat per spatiolum $Pp = dx$, atque in p sit altitudo debita celeritati $= v + dv$. Vis autem acceleratrix erit $= \frac{P}{A}$, quæ si unitati esset æqualis, foret $dv = dx$, præsenti ergo casu se habebit dx ad dv ut 1 ad $\frac{P}{A}$, unde fit $dv = \frac{Pdx}{A}$; Quamobrem erit incrementum altitudinis debitæ celeritati dv ad elementum spatii dx, uti vis motrix sollicitans P ad massam corporis A. Vicissim ergo ex elemento dv cognito innotescet vis motrix, erit enim $P = \frac{A\,dv}{dx}$. Sin autem loco celeritatis tempus t in computum inducatur, quia est $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$, erit $\sqrt{v} = \frac{dx}{dt}$ & $v = \frac{dx^2}{dt^2}$. Si jam elementum temporis dt constans assumatur, erit $dv = \frac{2dxddx}{dt^2} = \frac{Pdx}{A}$, seu $\frac{P}{A} = \frac{2ddx}{dt^2}$, unde ex tempore & spatio vis motrix ita definietur, ut sit $P = \frac{2A\,ddx}{dt^2}$. Hic quidem directionem vis sollicitantis cum directione motus consentientem assumsimus, ita ut ab ea celeritas corporis augeatur; sin autem vis sollicitans retro vergat, ita ut dum corpus per Pp progreditur, versus A retrahatur a vi P, tum quia hæc vis ratione prioris est negativa, erit $dv = \frac{-Pdx}{A}$ & $\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{-P}{A}$. Ceterum his duobus casibus sola

corpo-

corporis celeritas mutatur, ejus directione manente eadem; ſin autem directio vis fuerit obliqua, tum ſimul quoque directio motus variabitur, quem effectum nunc ſumus inveſtigaturi.

Tab. I. Fig. 2. §. XIV. Moveatur corpus, cujus maſſa ut ante ſit $=A$, in linea quacunque AM & cum in M pervenerit habeat celeritatem altitudini v debitam, qua uniformiter in directum eſſet progreſſurum ſecundum directionem Mm: in M autem urgeatur a vi motrice P ſecundum directionem MN. Referatur via corporis AM prolubitu ad axem AP, qui ſit ad directionem MN normalis, & vocetur abſciſſa $AP = x$, aplicata $PM = y$. Tempuſculo dt progrediatur corpus per elementum Mm, ductaque ordinata pm ipſi PM parallela erit $Pp = Mn = dx$, $mn = dy$, & $Mm = \surd(dx^2 + dy^2)$ quod vocetur $= ds$. Jam reſolvatur motus corporis verus more ſolito in duos laterales ſecundum directiones MN & Mn, atque illo abſolvet tempuſculo dt ſpatiolum $MN = dy$, hoc vero ſpatiolum $Mn = dx$. Celeritas ergo illius motus erit $= \frac{dy}{ds}\surd v$, hujus vero $= \frac{dx}{ds}\surd v$; eritque $dt = \frac{\surd(dx^2 + dy^2)}{\surd v}$. Jam prior motus ſolus a vi motrice P afficitur eritque uti oſtendimus, quia altitudo ejus celeritati debita eſt $= \frac{v dy^2}{ds^2}$, diff. $\frac{v dy^2}{ds^2} = \frac{P dy}{A}$: & quia alter motus prorſus non afficitur, cujus celeritas eſt debita altitudini $\frac{v dx^2}{ds^2}$ erit diff. $\frac{v dx^2}{ds^2} = o$. Addatur hæc æquatio ad illam

& ob

& ob $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit diff. $\frac{v(dy^2 + dx^2)}{ds^2} = dv = \frac{Pdy}{A}$. Quæ æquatio $dv = \frac{Pdy}{A}$ præbet accelerationem motus ſecundum veram directionem Mm. Quia vero eſt diff. $\frac{vdx^2}{ds^2} = o$, erit ſumto ds conſtante $dx^2 dv + 2vdxddx = o$, ubi ſi loco dv ejus valor $\frac{Pdy}{A}$ ſubſtituatur, orietur: $\frac{Pdxdy}{A} + 2vddx = o$. Eſt vero, quia ds eſt conſtans, radius curvedinis in $M = \frac{dsdy}{ddx}$, qui ſi dicatur $= r$, erit $ddx = \frac{dsdy}{r}$, unde iſta æquatio naſcetur $\frac{Pdxdy}{A} + \frac{2vdsdy}{r} = o$, quæ præbet $r = -\frac{2Avds}{Pdx}$, hæcque ergo curvatura orbitæ producitur ab obliquitate potentiæ ſollicitantis.

§. XV. Si igitur directio vis ſollicitantis M N cum directione motus corporis Mm angulum conſtituat obliquum NMm, non ſolum corporis celeritas variatur, ſed etiam ejus via, in qua incedit, incurvatur: qui duplex effectus, quo melius percipiatur, ſit angulus $NMm = \phi$, maſſa corporis $= A$ & vis motrix ſecundum directionem $Mm = P$: porro ſit ſpatiolum elemento temporis dt percurſum $Mm = ds$, & altitudo debita celeritati in M ſit $= v$. His poſitis erit

$dx = ds$ ſin Φ & $dy = ds$ coſ. Φ, poſito ſinu toto $= 1$. Quibus valoribus loco dx & dy ſubſtitutis, erit primo $dv = \frac{P}{A} ds$ coſ Φ: deinde via ita incurvabitur, ut ejus radius oſculi ſit $r = \frac{-2Av}{P \sin \Phi}$; quem cum axem A P verſus tendere aſſumſiſſemus, manifeſtum eſt lineam in plagam contrariam, eam ſcilicet, in quam tendit directio vis ſollicitantis M N, fore incurvatam; eritque ergo hujus curvedinis radius $= \frac{2Av}{P \sin \Phi}$. Sit nunc in fig. 3. M m directio motus, & elementum viæ tempusculo dt deſcriptum M $m = ds$, directio vis ſollicitantis P ſit ut ante M N cum directione M m angulum conſtituens N M T $= \Phi$. Reſolvatur hæc vis in binas laterales alteram ſecundum directionem tangentis M T, alteram vero ſecundum directionem ad viam corporis normalem M R, erit vis M T $=$ P coſ Φ & vis M R $=$ P ſin Φ. Ponatur autem vis tangentialis M T $=$ T & vis normalis M R $=$ R, erit T $=$ P coſ Φ & R $=$ P ſin Φ. His valoribus in ſuperioribus formulis ſubſtitutis proveniet $dv = \frac{T\,ds}{A}$ & $r = \frac{2Av}{R}$. Unde patet, quod quidem ex elementis abunde conſtat, celeritatem corporis a ſola vi tangentiali affici, & ita quidem perinde, ac ſi altera vis R penitus abeſſet. Alterius vero vis normalis R effectus tantum in incurvanda via corporis conſumitur, neque ab altera vi afficitur. Erit ergo perpetuo

Tab. I. Fig. 3.

radius

radius curvaturæ ad altitudinem celeritati debitam bis ſumtam, uti maſſa corporis ad vim normalem.

§. XVI. Viciſſim ergo ſi detur corporis ſecundum directionem M m procedentis acceleratio, ſcilicet ſi detur valor ipſius dv, dum per ſpatiolum M $m = ds$ promovetur, tum vis tangentialis corpus ſecundum directionem motus ſollicitans inde determinari poteſt: erit nimirum hæc vis $T = \frac{A\,dv}{ds}$. Simili modo cognoſcitur, ſi corporis via A m fuerit incurvata, atque in M radius curvedinis MR, qui ſit $= r$, detur, tum corpus a quapiam vi normali ſecundum directionem radii oſculi MR ſollicitari, eritque hæc vis $R = \frac{2\,A\,v}{r}$. Utcunque ergo motus corporis tam ratione directionis, quam ratione celeritatis varietur, vires has variationes producentes ſemper aſſignari poterunt, eæque reducentur ad duas normalem & tangentialem, quarum illa ex mutatione directionis, hæc vero ex mutatione celeritatis originem habet. Hoc autem intelligendum eſt, ſi motus corporis perficiatur in eodem plano, ſi enim via a corpore deſcripta duplicem habeat curvaturam, tum vires ſollicitantes ad tres directiones inter ſe normales revocantur. Quodſi loco celeritatis in calculum introducatur tempus t, quoniam eſt $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, fiet $\sqrt{v} = \frac{ds}{dt}$ & $v = \frac{ds^2}{dt^2}$; ſumatur elementum dt conſtans, eritque $dv = \frac{2\,ds\,dds}{dt^2}$. Hinc ſi vis tangentialis ſecundum

cundum MT ut ante fit $= T$, & vis normalis secundum MR $= R$; utriusque effectus ita se habebit, ut sit $\frac{2\,dds}{dt^2} = \frac{T}{A}$, & $r = \frac{2\,A\,ds^2}{R\,dt^2}$, seu $R = \frac{2\,A\,ds^2}{r\,dt^2}$. Quæ duæ æquationes si in se multiplicentur, tam dt quam massa A eliminabitur, fietque $R\,dds = \frac{T\,ds^2}{r}$; unde erit generatim vis tangentialis T ad vim normalem R, uti $rdds$ ad ds^2 seu ut $-$ diff. $\frac{1}{ds}$ ad $\frac{1}{r}$; si quidem elementum temporis dt statuatur constans.

§. XVII. Hæ leges motus autem præcipue spectant corpuscula infinite parva, in quæ varius partium motus non cadit: atque ad corpora finitæ magnitudinis referri nequeunt, nisi ratione motus ita sint comparata, ut tota eorum massa in unico puncto collecta concipi possit. Cujusmodi indolis cum assumamus ea corpora, quæ in tubis moventur, ex his legibus motus corporum tubis inclusorum determinari debebit. Quod autem ad motum ipsius tubi attinet, quia diversæ ejus partes diversimode moveri possunt, peculiares motus leges sunt investigandæ, quæ a ratione mobilitatis tubi pendebunt. Atque in hac quidem sectione motum tubi ejusmodi constituimus, ut perpetuo singulæ ejus partes æqualibus celeritatibus secundum communem directionem moveantur. Evenit hoc in motu reptorio, ubi corpus respe-

ctu

ctu plagarum mundi perpetuo eundem ſitum retinere ponitur. Hic autem potiſſimum contemplabimur motum reptorium ſuper linea recta, ſecundum quam omnia tubi puncta moveantur & quidem quovis momento æqualibus celeritatibus. Sit igitur ABC corpus quodcunque, in cujus ſuperficie A B affixus concipiatur tubus, in quo unum plurave corpora ſint incluſa. Hic autem primum ſolius tubi ſeu corporis A B C, quocum tubus eſt connexus, motum ejusque variationem a potentiis ſollicitantibus oriundam inveſtigari oportet, & hancobrem nulla adhuc corpora tubo incluſa conſideramus. Sit igitur recta O V directionem motus tubi determinans, cui corpus A B C baſi ſua B C ita incumbat, ut ea perpetuo lineæ rectæ O V maneat applicata. Hoc ſcilicet modo corpus A B C, niſi quiescat, motu ſibi parallelo ſecundum directionem O V ita movebitur, ut quovis momento cuncta ejus puncta M ſecundum eandem directionem æqualibus celeritatibus progrediantur: unde ſi unius ejus puncti M celeritas fuerit cognita, eidem omnium reliquorun punctorum celeritates æquales erunt. *Tab. I. Fig. 4.*

§. XVIII. Porro autem aſſumimus hoc corpus motu ſuo ſuper linea O V nullam frictionem pati, unde ſi ſemel nactum fuerit motum ſecundum directionem O V, hunc motum perpetuo uniformem conſervabit, niſi a potentiis ſollicitantibus perturbetur. Quare ſi celeritas puncti C ſecundum directionem C V debita ponatur altitudini u, non ſolum omnes particulæ corporis M eandem celeritatem ſecundum eandem directionem

M N parallelam ipſi C V habebunt, ſed etiam eodem motu perpetuo promovebuntur. Quia enim hoc motu ſitus relativus partium non immutatur, omnes particulæ motum inſitum perinde conſervabunt, ac ſi a ſe invicem eſſent diſſolutæ. Quod autem ad effectum virium ſollicitantium attinet, quia mobilitas corporis ita eſt reſtricta, ut alium motum niſi ſecundum directionem O V recipere nequeat; manifeſtum eſt alias potentias, niſi quarum directio ſit eadem, motum corporis afficere non poſſe. Videamus ergo cujusmodi vi opus ſit, ut motus corporis A B C datam accelerationem inde accipiat. In hunc finem concipiatur corporis particula quæcunque M, cujus maſſa ſit $= dM$. Cum igitur ejus celeritas debita ſit altitudini u, quo hæc altitudo u incrementum capiat du, dum punctum M per elementum ſpatii $Mm = dx$ progreditur, neceſſe eſt ut ſecundum directionem M N ſollicitetur vi $= \frac{du}{dx} dM$, ubi $\frac{du}{dx}$, quia omnes particulæ æquali motu ſunt præditæ, quantitas erit conſtans. Quodſi jam omnium iſtarum virium, quibus ſingulæ corporis particulæ ſollicitari debent, una vis æquivalens inveſtigatur, ea reperietur $= \frac{du}{dx} \int dM = \frac{M du}{dx}$, ſiquidem M denotet maſſam totius corporis A B C, hujusque vis, uti ex ſtaticis patet, directio erit parallela rectæ O V & per corporis A B C centrum gravitatis tranſibit. Ut igitur altitudo celeritati totius corporis A B C debita u, dum corpus per ſpatiolum $Cc = dx$ progreditur, incrementum capiat du, neceſſe eſt ut corpus ſecun-

ſecundum directionem G H per ejus centrum gravitatis G transeuntem & rectæ O V parallelam ſollicitetur vi $= \frac{M\,du}{dx}$.

§. XIX. Viciſſim ergo ſi corpus A B C, quod motu ſibi parallelo ſecundum directionem O V celeritatem habeat altitudini u debitam, ſollicitetur ſecundum eandem directionem a vi P per ejus centrum gravitatis G tranſeunte, motus corporis ſibi parallelus, quidem manebit, ſed ita accelerabitur, ut dum per ſpatiolum $Cc = dx$ progreditur, fiat $P = \frac{M\,du}{dx}$ ſeu $du = \frac{P\,dx}{M}$. Perinde igitur ſe habebit iſte effectus, ac ſi maſſa totius corporis M in ejus centro gravitatis G eſſet collecta; atque adeo regulæ ante pro corpuſculis infinite parvis traditæ quoque ad hunc caſum patent. Quin etiam hæc acceleratio a vi G H oriunda eadem eſſet futura, etiamſi corpus liberrime eſſet mobile, quia in hoc ratiocinio reſtrictionis mobilitatis ratio non eſt habita. Ob hanc autem fit, ut aliæ vires in corpore nullum effectum exercere poſſint, niſi quatenus cum directione O V conſentiunt. Ac primo quidem vires, quarum directio ad O V eſt normalis motum corpus A B C nullo modo afficient: quare cum omnes vires reſolvi poſſint in binas laterales, quarum alteræ ſint ſecundum O V directæ, alteræ ad O V normales, priores tantum motum corporis alterabunt, poſteriores vero, niſi quatenus preſſionem corporis ad planum O V efficiunt, penitus negligi poſſunt. Ante quidem ex his viribus earum

earum tantum effectus est definitus, quarum directio non solum rectæ O V est normalis, sed etiam per centrum gravitatis corporis G transit: nunc autem ob restrictionem mobilitatis efficitur, ut qualibet vis secundum directionem O V agens, sive ea per centrum gravitatis G transeat sive secus, eundem effectum producere debeat. Ponamus enim vim P corpus secundum directionem M N sollicitare: si in centro gravitatis G æqualem vim in directione contraria G h applicatam concipiamus, hæ duæ vires corpus, quia alium motum nisi in directione O V recipere nequit, in æquilibrio tenebunt, hincque vis $MN = P$ eundem effectum præstabit, atque æqualis vis G H in centro gravitatis G applicata, eritque propterea $du = \frac{P\,dx}{M}$; quæ enim vires ab eadem potentia in æquilibrio retinentur, eæ quoque in corpore, cui sunt applicatæ, eundem effectum producunt.

Tab. I. Fig. 5. § XX. His præmissis principiis propositum aggrediamur; ac primo quidem consideremus tubum rectum A B ad planum O V, super quo est mobilis, utcunque inclinatum, seu quod eodem redit, concipiatur tubus plano inclinato A B C secundum longitudinem A B adjunctus, ita ut hoc planum inclinatum A B C secundum directionem O V libere moveri possit, alium autem motum recipere nequeat. In tubo autem inclusum sit corpus, cujus massa $= A$; tubi autem cum adjuncta plani inclinati mole massa sit $= M$. Elapso jam tempore t pervenerit tam tubus A B, quam corpus in eo P in situm, quem figura repræ-

repræsentat; initio autem ponamus corpus tubo inclusum extitisse in A, & punctum tubi B in puncto O hæsisse. Vocetur spatium $AP = x$, & $OB = s$, atque angulus constans $ABC = \theta$. Cum igitur tempusculo dt ipse tubus per spatiolum $Bb = ds$, & corpus in tubo per spatiolum $Pp = dx$ progrediatur, erit celeritas tubi seu plani inclinati secundum directionem $OV = \frac{ds}{dt}$, & celeritas corporis in tubo $= \frac{dx}{ds}$. Præter hunc vero motum corpus tubo inclusum motum cum tubo habebit communem, ita ut sumta $P\pi$ basi OV parallela in corpore P duplex insit motus, alter secundum directionem Pp celeritate $\frac{dx}{dt}$, alter vero secundum directionem $P\pi$ celeritate $\frac{ds}{dt}$. Ad hos ergo motus producendos viribus secundum easdem directiones sollicitantibus erit opus. Ac primo quidem corpus in P, cujus massa posita est $= A$, secundum directionem Pp sollicitari debet vi $= \frac{2A\,ddx}{dt^2}$, & secundum directionem $P\pi$ vi $= \frac{2A\,dds}{dt^2}$ posito elemento temporis dt constante. Simili modo oportet, ut ipse tubus AB cum plano inclinato ABC secundum directionem BV sollicitetur vi $= \frac{2M\,dds}{dt^2}$; ostendimus enim modo perinde esse, ubi hæc vis corpori ABC sit applicata, dummodo ejus directio parallela sit directioni motus OV.

§. XXI. Hæ ergo vires ad motum, quem tam in tubo quam in corpore inesse fingimus, producendum requiruntur: quæ ideo vires cum iis, quibus cum tubus tum corpus revera sollicitantur, convenire debent: hæcque convenientia nobis suppeditabit æquationes, ex quibus hos singulos motus determinare licebit. Præter vires autem externas, quæ tam in corpus quam tubum agunt, imprimis spectanda est pressio, qua corpus P tubum urget. Quatenus enim firmitas tubi impedit, quo minus corpus eum sequatur motum, quem secuturum esset, si omnino liberum esset, eatenus corpus vim in ipsum tubum exerit, eumque premit. Quia autem latera tubi tantum corporis motum ad latera coercent, pressio non potest esse non normalis ad directionem tubi. Ponamus ergo corpus in P existens tubum premere secundum directionem P N ad tubum A B normalem, hancque pressionem esse $=$ P; & quia nullum corpus alterum premere potest, quin simul tantundem reprimatur, unde principium æqualitatis inter actionem & reactionem est derivatum; manifestum est corpus in P æquali vi P secundum directionem contrariam P n sollicitari. Quanquam autem quantitas hujus pressionis P adhuc est incognita, tamen expedit eam statim in calculum introducere, quam complicatis ratiociniis eam prius definire: hoc enim modo ea facillime cum toto motu ex æquationibus mox inveniendis determinabitur. Ob hanc igitur pressionem P ipse tubus seu totum corpus A B C sollicitatur vi $=$ P secundum directionem P N, ideoque secundum directionem P π vi $=$ P sin θ, quæ

sola

ſola vis motum tubi afficit. Corpus autem in P urgebitur vi pari P ſecundum directionem P π, quæ ſecundum directiones P p & P π reſoluta dabit vim ſecundum P $p = -\frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$ & ſecundum P π vi $= -\frac{P}{\sin \theta}$; uti ex reſolutione virium facile colligitur

§. XXII. Si jam neque tubus neque corpus in tubo ab ulla vi externa ſollicitetur, omnes motus variationes a ſola preſſione orientur. Quare cum corpus in P ſecundum directionem P p ſollicitari debeat vi $= \frac{2 A ddx}{dt^2}$, revera autem in hac directione ſollicitetur vi $= \frac{-P \cos \theta}{\sin \theta}$, habebimus æquationem $\frac{2 A ddx}{dt^2} = -\frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$: ſimili modo ſollicitationes tam corporis quam tubi ſecundum directionem P π dabunt has æquationes $\frac{2 A dds}{dt^2} = -\frac{P}{\sin \theta}$ & $\frac{2 M dds}{dt^2} = P \sin \theta$. Hæ duæ æquationes, ſi altera per alteram dividatur, dant $\frac{M}{A} = -\sin \theta^2$, quæ æqualitas locum habere nequit, niſi ſit $P = o$: ſit ergo $P = o$, eritque tam $dds = o$, quam $ddx = o$. Hinc fiet integrando $\frac{ds}{dt} = \alpha$ & $\frac{dx}{dt} = \beta$. Hoc ergo caſu tam motus corporis in tubo, quam ipſius tubi erit uniformis, atque tubus a corpore nullam preſſionem ſuſtinebit. Qui

 ergo

ergo motus initio tam tubo quam corpori ipſi incluſo fuerit impreſſus, idem perpetuo conſervabitur uniformis, qui caſus ſtatim primo intuitu reſolvi potuiſſet, quia nihil impedit, quominus tam tubus, quam corpus ipſi incluſum motum ſemel impreſſum proſequantur, perinde ac ſi a ſe invicem eſſent ſoluta. Ceterum eliminatio ipſius P aliis modis inſtitui poteſt, prima enim & ſecunda æquatio præbent $\frac{2 A ddx}{dt^2} - \frac{2 A dds \operatorname{cof.} \theta}{dt^2} = o$. Tum ſumma ſecundæ & tertiæ erit $\frac{2 A dds}{dt^2} + \frac{2 M dds}{dt^2} = - \frac{P \operatorname{cof} \theta^2}{\operatorname{fin} \theta}$; unde ſi ope primæ P eliminetur, erit $\frac{2 A ddx \operatorname{cof} \theta}{ds^2} - \frac{2 A dds}{dt^2} - \frac{2 M dds}{dt^2} = o$. Prior dat $dx - ds \operatorname{cof} \theta = m dt$, & altera $A\, dx \operatorname{cof} \theta - A ds - M ds = n dt$; unde eruitur $dx = \frac{m (A + M)\, dt - n dt \operatorname{cof} \theta}{A \operatorname{fin} \theta^2 + M}$ & $ds = \frac{m A dt \operatorname{cof} \theta - n dt}{A \operatorname{fin} \theta^2 + M}$. Cum igitur tam dx quam ds ſit conſtans, manifeſtum eſt, ob $ddx = o$ & $dds = o$ preſſionem P eſſe nullam.

§. XXIII. Ponamus nunc corpus in P a gravitate naturali ſollicitari, lineamque O V eſſe horizontalem, qui eſt caſus a Cel. Bernoullio primum in hoc genere ſolutus. Urgebitur ergo corpus P a vi ejus ponderi æquali A in directione P Q perpendiculari ad O V; atque in hac hypotheſi perinde erit, ſive ſimul planum inclinatum A B C grave ſtatuatur ſive minus.

Reſol-

Resolvatur hæc vis PQ $=$ A secundum directiones Pp & $P\pi$, prodibitque ea quæ corpus secundum Pp urget $= \frac{A}{\sin\theta}$, & secundum $P\pi = \frac{A\cdot\cos\theta}{\sin\theta}$. Si igitur hæc vis cum pressione conjungatur, corpus P primum in directione Pp sollicitatur vi $= \frac{A - P\cos\theta}{\sin\theta}$, & in directione $P\pi$ vi $= \frac{A\cos\theta - P}{\sin\theta}$; ipse autem tubus ut ante sollicitabitur in directione O V vi $=$ P $\sin\theta$; quæ vires, si ante inventis & ex indole motus derivatis æquales ponantur, orientur tres sequentes æquationes:

$$\text{I. } \frac{2A\,ddx}{dt^2} = \frac{A - P\cos\theta}{\sin\theta}; \quad \text{II. } \frac{2A\,dds}{dt^2} = \frac{A\cos\theta - P}{\sin\theta}$$

$$\text{\& III. } \frac{2M\,dds}{dt^2} = P\sin\theta$$

addantur secunda & tertia prodibitque æquatio

$$\text{IV. } \frac{2(A+M)\,dds}{dt^2} = \frac{A\cos\theta - P\cos\theta^2}{\sin\theta}$$

jam eliminando P prima & secunda dabit:

$$\text{V. } \frac{2A\,ddx}{dt^2} - \frac{2A\,dds\cos\theta}{dt^2} = A\sin\theta$$

tum ex prima & quarta nascetur:

$$\text{VI. } -\frac{2A\,ddx\cos\theta}{dt^2} + \frac{2(A+M)\,dds}{dt^2} = 0$$

quæ duæ æquationes inserviunt quantitatibus x & s per t definiendis. Pressio autem commodissime definitur ex æquationibus

tionibus II & III. quarum hæc per illam divisa dat $\frac{M}{A} = \frac{P \sin\theta^2}{A\cos\theta - P}$, unde invenitur pressio $P = \frac{A M \cos\theta}{M + A \sin\theta^2}$; quæ ergo est constans, atque perpetuo ejusdem manet quantitatis. Cum igitur ex staticis sit pressio corporis in planum immobile $= A \cos\theta$, erit pressio in planum mobile ad pressionem in idem planum immobile uti M ad $M + A \sin\theta^2$.

§. XXIV. Inventa pressione P, si ejus valor substituatur, æquatio prima abibit in hanc formam

$$\frac{2A\,ddx}{dt^2} = \frac{A(A+M)\sin\theta}{M + A\sin\theta^2} \text{ seu } \frac{2ddx}{dt} = \frac{(A+M)\,dt\sin\theta}{M + A\sin\theta^2}.$$

Hæc æquatio integrata dabit:

$$\frac{2dx}{dt^2} = \frac{(A + M)\,t\sin\theta}{M + A\sin\theta^2} + C.$$

Si ergo ponamus initio, ubi $t = o$, corpus in tubo quievisse, quia $\frac{dx}{dt}$ exprimit ejus celeritatem, fuit $C = o$, erique $\frac{2dx}{dt} = \frac{(A + M)\,t\sin\theta}{M + A\sin\theta^2}$, ideoque celeritas corporis in tubo in ratione temporis crescit. Porro autem integrando si initio motus corpus fuerit in puncto A erit $x = \frac{(A + M)\,tt\sin\theta}{4(M + A\sin\theta^2)}$, hincque ad quodvis tempus locus corporis in tubo assignabitur. Deinde secunda vel tertia

æquatio

æquatio præbet: $\frac{2dds}{dt^2} = \frac{A \sin\theta \cos\theta}{M + A \sin\theta^2}$, unde ſi planum inclinatum initio ubi erat $t = o$, in O quieverit, obtinetur $\frac{2ds}{dt} = \frac{At \sin\theta \cos\theta}{M + A \sin\theta^2}$: ita ut quoque celeritas plani in ratione temporis creſcat: denuo vero integrando erit $s = \frac{Att \sin\theta \cos\theta}{4(M + A \sin\theta^2)}$. Tam corpus ergo in tubo quam ipſe tubus motu uniformiter accelerato promovebitur; eritque quovis momento celeritas corporis in tubo progredientis ad celeritatem plani inclinati ut A + M ad A coſ θ. Hinc colligitur caſus deſcenſus ſuper plano inclinato immobili ſi maſſa plani inclinati M ſtatuatur infinita, tum enim fiet $\frac{ds}{dt}$ ſeu celeritas plani nulla, celeritas autem corporis ſuper hoc plano quieſcente erit $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} t \sin\theta$ & $x = \frac{1}{4} tt \sin\theta$; qui motus cum eo, qui in Mechanica definiri ſolet, egregie convenit. Cum enim ſit $t\sqrt{\sin\theta} = 2\sqrt{x}$, erit celeritas $\frac{dx}{dt} = \sqrt{x \sin\theta}$ & altitudo debita celeritati $= x \sin\theta$ hoc eſt altitudini; ex qua corpus jam deſcendit.

§. XXV. Ex duplici motu, quem in corpore tubo incluſo ineſſe invenimus, facile ejus verus motus & directio concluditur. Capiantur enim Pp & Pπ celeritatibus, quas corpus ſecundum has directiones habet, proportionales, ita ut *Tab. I. Fig. 6.*

ſit Pp

ſit $Pp = \frac{dx}{dt}$ & $P\pi = \frac{ds}{dt}$, compleaturque parallelogrammum $P p T \pi$: quo facto diagonalis PT tam veram directionem motus quam celeritatem exhibebit. Cum jam ſit angulus ad $p = \theta$ & $pT = \frac{ds}{dt}$, erit $PT = \frac{\sqrt{(dx^2 + ds^2 - 2\,dx\,ds\,\mathrm{cof}\,\theta)}}{dt}$ quæ expreſſio ſimul celeritatem corporis P exprimit, ita ut altitudo huic celeritati debita ſit $= \frac{dx + ds^2 - 2\,dx\,ds\,\mathrm{cof}\,\theta}{dt^2}$. Producatur pT donec rectæ verticali PQ occurrat in Q eritque $PQ = \frac{dx\,\mathrm{fin}\,\theta}{dt}$ & $QT = \frac{dx\,\mathrm{cof}\,\theta - ds}{dt}$: unde erit tang. $QPT = \frac{dx\,\mathrm{cof}\,\theta - ds}{dx\,\mathrm{fin}\,\theta}$, quare cum ſit tang. $pPQ = \frac{\mathrm{cof}\,\theta}{\mathrm{fin}\,\theta}$, prodibit tang. $pPT = \frac{ds\,\mathrm{fin}\,\theta}{dx - ds\,\mathrm{cof}\,\theta}$ tanto ergo angulo p P T directio corporis vera a directione tubi deflectit. Cum igitur invenerimus $\frac{dx}{dt} = \frac{(A + M)\,t\,\mathrm{fin}\,\theta}{2\,(M + A\,\mathrm{fin}\,\theta^2)}$ & $\frac{ds}{dt} = \frac{A\,t\,\mathrm{fin}\,\theta\,\mathrm{cof}\,\theta}{2\,(M + A\,\mathrm{fin}\,\theta^2)}$, erit celeritas corporis in P vera $= \frac{t\,\mathrm{fin}\,\theta}{2\,(M + A\,\mathrm{fin}\,\theta^2)}\sqrt{}$ $(A^2\,\mathrm{fin}\,\theta^2 + 2\,A\,M\,\mathrm{fin}\,\theta^2 + M\,M)$ & altitudo huic celeritati debita $= \frac{tt\,\mathrm{fin}\,\theta^2 (A^2\,\mathrm{fin}\,\theta^2 + 2\,AM\,\mathrm{fin}\,\theta^2 + MN)}{4\,(M + A\,\mathrm{fin}\,\theta^2)^2}$

$= x$ ſin

$= \frac{x \sin\theta (A^2 \sin\theta^2 + 2AM \sin\theta^2 + MM)}{(A+M)(M + A \sin\theta)}$ ob $x = \frac{(A+M) u \sin\theta}{4(M + A \sin\theta^2)}$. Deinde eſt tangens anguli QPT $= \frac{M \cos\theta}{(A+M)\sin\theta}$; Sicque corpus in tubo revera ſecundum lineam rectam PT deſcendit, quæ ad horizontem inclinatur angulo PTQ, cujus tangens eſt $= (1 + \frac{A}{M}) \tang \theta$, eritque ergo QT : Q$p$ = M : A+M. Via autem hæc corporis vera PT declinabit a directione tubi Pp angulo TPp, cujus tangens eſt $= \frac{A \sin\theta \cos\theta}{M + A \sin\theta^2}$. Celeritas autem corporis in P vera ſe habebit ad celeritatem ejusdem corporis, quam ibidem acquiſitura eſſet ſuper plano inclinato immobili, ut $\sqrt{(M^2 + 2AM \sin\theta^2 + A^2 \sin\theta^2)}$ ad $\sqrt{(A+M)(M + A \sin\theta^2)}$, ideoque illa minor erit quam hæc. Tempus denique totius deſcenſus per AB = a erit $= 2\sqrt{\frac{a(M + A\sin\theta^2)}{(A+M)\sin\theta}}$. Quare cum hoc tempus, ſi planum inclinatum eſſet immobile, foret $= 2\sqrt{\frac{a}{\sin\theta}}$, erit tempus deſcenſus ſuper plano inclinato immobili ad tempus deſcenſus ſuper mobili uti $\sqrt{(A+M)}$ ad $\sqrt{(A \sin\theta^2 + M)}$, unde illud hoc erit majus.

§. XXVI. Qui hæc phænomena obiter tantum intuentur,

tur, principium conſervationis virium vivarum non parum vim pati videbitur, vix enim cum hoc principio conciliari poſſe putabunt, quod corpus ſuper plano inclinato mobili, cum huic quoque motus imprimi debeat, breviori tempore deſcendat, quam ſuper immobili. Ad hoc quoque inſuper accedit, quod corpus ſuper plano inclinato mobili majorem conſequatur celeritatem, quam nacturum eſſet eodem tempore deſcendens ſuper plano inclinato immobili. Celeritas enim tempore t ſuper plano inclinato mobili acquiſita eſt $= \frac{t \sin\theta \sqrt{(M^2 + 2AM \sin\theta^2 + AA \sin\theta^2)}}{2(M + A \sin\theta^2)}$ cum ſuper immobili ſi $M = \infty$, eodem tempore acquiratur celeritas $= \frac{1}{2} t \sin\theta$, quæ illa eſt minor. Nihilo tamen minus eadem conſervatur virium vivarum quantitas: cum enim vis viva ſit productum ex maſſa in celeritatis quadratum, erit corporis tubo incluſi vis viva $= \frac{A tt \sin\theta^2 (M^2 + 2AM \sin\theta^2 + AA \sin\theta^2)}{4(M + A \sin\theta^2)^2}$ tubi autem ſeu plani inclinati vis viva eſt $= \frac{AAM tt \sin\theta^2 \cos\theta^2}{4(M + A \sin\theta^2)^2}$ $= \frac{A tt \sin\theta^2 (AM - AM \sin\theta^2)}{4(M + A \sin\theta^2)^2}$, quæ ad illam addita dabit ſummam $= \frac{A tt \sin\theta^2 (A + M)}{4(M + A \sin\theta^2)} = A x \sin\theta$, ideoque eadem eſt, ac ſi corpus A verticaliter ex eadem altitudine $x \sin\theta$ eſſet delapſum. Conſervatio autem virium vivarum ex æquationibus §. 23. V. & VI. ſponte ſequitur; ſi enim quinta per

dx &

dx & ſexta per ds multiplicetur, habebitur earum ſumma
$$\frac{2Adxddx - 2Adxdds \operatorname{coſ}\theta - 2Adsddx \operatorname{coſ}\theta + 2Adsdds + 2Mdsdds}{dt^2}$$
$= A\,dx \operatorname{ſin}\theta$, cujus integrale eſt $\frac{Adx^2 - 2Adxds \operatorname{coſ}\theta + Ads^2 + Mds^2}{dt^2}$
$= Ax \operatorname{ſin}\theta$. Eſt vero uti vidimus $\frac{A(dx^2 - 2dxds \operatorname{coſ}\theta + ds^2)}{dt^2}$
vis viva corporis A & $\frac{Mds^2}{dt^2}$ vis viva corporis M, quarum adeo ſumma eſt $= Ax \operatorname{ſin}\theta$. Cum igitur $x \operatorname{ſin}\theta$ ſit altitudo verticalis, ex qua corpus jam eſt delapſum, manifeſtum eſt eandem prorſus generari vim vivam, ac ſi corpus A libere ex eadem altitudine deſcendiſſet.

§. XXVII. Ponamus jam rectam OV ſuper qua planum inclinatum ABC eſt mobile, ipſam ad horizontem HV eſſe inclinatam angulo $HVO = \zeta$: in plano autem inclinato ABC ſit angulus $ABC = \theta$ & recta AC ad OV normalis. Porro ſit ut ante maſſa corporis ſuper AB incedentis $= A$, & maſſa plani inclinati $ABC = M$: ſi jam utrumque corpus gravitate naturali præditum ſtatuatur, inveſtigemus motum inde oriundum. Cœperit motus initio ex quiete, quo tempore plani inclinati punctum B in O corpus autem in A ſit verſatum. Tam elapſo tempore t pervenerit planum inclinatum in ſitum ABC, & corpus in punctum P. Vocentur ſpatia $AP = x$ & $OB = s$, ductaque PG ipſi OV parallela, *Tab. I. Fig. 7.*

rallela, necesse est ut corpus in P sollicitetur secundum directionem PB vi $= \frac{2 A d d x}{d t^2}$, & secundum directionem PB vi $= \frac{2 A d d s}{d t^2}$: ipsum autem planum inclinatum ABC secundum directionem BV impelli debet vi $= \frac{2 M d d s}{d t^2}$ posito dt constante, quemadmodum jam supra ostendimus. Sit jam pressio, quam corpus P in planum AB secundum directionem PN ad AB normalem exerit $=$ P, atque corpus P æquali vi P secundum directionem oppositam Pn urgebitur. Quia nunc plani inclinati ABC motus a nulla vi, nisi cujus directio rectæ OV est parallela, afficitur, ex pressione PN $=$ P resultabit vis secundum directionem PG urgens $=$ P sin θ ob ang: ANP $= \theta$. Corpus autem in Pa vi Pn $=$ P sollicitabitur in directione PB vi $= - \frac{P \cos \theta}{\sin \theta}$, & in directione PG vi $= - \frac{P}{\sin \theta}$. Singulas enim vires ad directiones, secundum quas motus fieri consideratur, reduci oportet. Est autem corporis P celeritas secundum PB $= \frac{dx}{dt}$, & secundum PG $= \frac{ds}{dt}$, quam communem habet cum motu plani inclinati ABC, quæ secundum directionem BV pariter est $= \frac{ds}{dt}$. Ex duplici vero corporis P motu orietur ejus vera celeritas $=$

$\surd (dx^2$

$\frac{\sqrt{(dx^2 - 2dxds \operatorname{cof} \theta + ds^2)},}{dt}$ quæ erit ſecundum PT directa exiſtente tang BPT $= \frac{ds \operatorname{fin} \theta}{dx - ds \operatorname{cof} \theta}$: hactenus ſcilicet eædem formulæ valent, quas ante inveneramus.

§. XXVIII. Jam conſideremus vires gravitatis, quibus utrumque corpus ſollicitatur: ac primo quidem corpus in P urgebitur vi $= A$ ſecundum directionem PQ ad horizontem HV perpendicularem. Cum igitur ſit angulus HVO $= \zeta$, erit BIP $= 90 - \zeta$ & APQ $= 90 - \zeta + \theta$; atque QPG $= 90 - \zeta$. Reſolvatur nunc vis PQ $= A$ ſecundum directiones motus PB & PG, eritque ex ſtaticis:
ſin BPG: vim PQ $=$ ſin QPG: vim PB $=$ ſin QPB: vim PG. Hinc ergo corpus in P ſollicitabitur ſecundum directionem PB vi $= \frac{A \operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{fin} \theta}$, & ſecundum PG vi $= \frac{A \operatorname{cof} (\theta - \zeta)}{\operatorname{fin} \theta}$. Deinde planum inclinatum vi gravitatis $= M$ ſollicitatur ſecundum directionem verticalem GK, ex qua oritur vis ſecundum directionem ejus motus BV agens $= M \operatorname{fin} \zeta$. Si ad has vires adjiciantur eæ, quæ ex preſſione ſunt ortæ, omnino corpus P ſollicitabitur ſecundum directionem PB vi $= \frac{A \operatorname{cof} \zeta}{\operatorname{fin} \theta} - \frac{P \operatorname{cof} \theta}{\operatorname{fin} \theta}$, quæ vi $\frac{2Addx}{dt^2}$ æqualis eſſe debet. Deinde idem corpus in directione PG impelletur vi $= \frac{A \operatorname{cof} (\theta - \zeta)}{\operatorname{fin} \theta} - \frac{P}{\operatorname{fin} \theta}$, quæ vi $\frac{2Adds}{dt^2}$ æqualis eſt. Denique

que ipſum planum inclinatum in directione B V impelletur vi $= \mathrm{M} \sin \zeta + \mathrm{P} \sin \theta$, quæ vi $\frac{2\mathrm{M}dds}{dt^2}$ æqualis eſt ponenda, unde tres ſequentes obtinemus æquationes:

$$\text{I.}\quad \frac{2Addx}{dt^2} = \frac{A \cos \zeta - \mathrm{P} \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\text{II.}\quad \frac{2Adds}{dt^2} = \frac{A \cos(\theta - \zeta) - \mathrm{P}}{\sin \theta}$$

$$\text{III.}\quad \frac{2\mathrm{M}dds}{dt^2} = \mathrm{M} \sin \zeta + \mathrm{P} \sin \theta$$

quæ duæ poſteriores additæ dabunt ut ſupra:

$$\text{IV.}\quad \frac{2(A+\mathrm{M})dds}{dt^2} = \frac{A \cos(\theta - \zeta) + \mathrm{M} \sin \zeta \sin \theta - \mathrm{P} \cos \theta^2}{\sin \theta}$$

hincque porro derivantur æquationes quinta & ſexta:

$$\text{V.}\quad \frac{2Addx - 2Adds \cos \theta}{dt^2} = A \sin(\theta - \zeta), \ \&$$

$$\text{VI.}\quad \frac{-2Addx \cos \theta + 2Adds + 2\mathrm{M}dds}{dt^2} = (A+\mathrm{M}) \sin \zeta.$$

§. XXIX. Si æquatio V per dx & VI per ds multiplicetur, & ambæ addantur, prodibit hæc æquatio:

$$\frac{2Adxddx - 2Adxdds \cos \theta - 2Adsddx \cos \theta + 2Adsdds + 2\mathrm{M}dsdds}{dt^2}$$

$= A dx \sin(\theta - \zeta) + (A + \mathrm{M})\, ds \sin \zeta$; quæ integrata

$$\frac{Adx^2 - 2Adxds \cos \theta + Ads^2 + \mathrm{M}ds^2}{dt^2} = Ax \sin(\theta - \zeta) + (\mathrm{A}+\mathrm{M})\, s \sin \zeta$$

omnino eſt eadem, quam principium conſervationis virium vivarum

vivarum præbet, unde ſummus hujus principii uſus in iſtiusmodi problematis ſolvendis luculenter apparet, quod ſtatim perducat ad æquationem, quam nos demum per integrationem obtinuimus. Præſens autem problema ex tribus primariis æquationibus eliminanda P facilius reſolvetur. Tertia enim per ſecundam diviſa dat $\frac{M}{A} = \frac{M \sin \zeta \sin \theta + P \sin \theta^2}{A \cos(\zeta - \theta) - P}$ unde elicitur $P = \frac{A M \cos \zeta \cos \theta}{M + A \sin \theta^2}$; quamobrem quoque hoc caſu preſſio corporis in tubum perpetuo manet eadem, ſeque habet ad pondus corporis A ut $M \cos \zeta \cos \theta$ ad $M + A \sin \theta^2$, ſubſtituatur hic preſſionis valor in æquatione prima & habebitur $\frac{2 A\, ddx}{dt^2} = \frac{A\,(A + M) \sin \theta \cos \zeta}{M + A \sin \theta^2}$, quæ integrata dat $\frac{dx}{dt} = \frac{(A + M)\, t \sin \theta \cos \zeta}{2(M + A \sin \theta^2)}$ & $x = \frac{(A + M)\, tt \sin \theta \cos \zeta}{4(M + A \sin \theta^2)}$ unde fit $t = \frac{2 \sqrt{(M + A \sin \theta^2)\, x}}{\sqrt{(A + M) \sin \theta \cos \zeta}}$. Tertia vero æquatio dabit $\frac{2 M\, dds}{dt^2} = \frac{M\,(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))}{M + A \sin \theta^2}$, unde fit $\frac{ds}{dt} = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))\, t}{2(M + A \sin \theta^2)}$ & $s = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta))\, tt}{4(M + A \sin \theta^2)}$ Alterque ergo motus eſt uniformiter acceleratus. Caſus hic notari meretur quo $\zeta = \theta$, & ſitus tubi AB fit horizontalis; tum enim corpus A ſecundum lineam verticalem deſcendit, fit namque tang $BPT = \frac{(M \sin \zeta + A \sin \theta \cos(\theta - \zeta)) \sin \theta}{(M + A \sin \theta^2) \sin(\theta - \zeta)}$

quæ

quæ casu $\zeta = \theta$ fit infinite magna & angulum BPT rectum declarat.

Tab. I. Fig. 8. §. XXX. Sint nunc in tubo AB, qui motu sibi parallelo super recta OV ponitur mobilis sub angulo constante $ABC = \theta$ plura corpora inclusa, quorum motum una cum motu tubi determinare oporteat. Accomodemus autem solutionem ad tria corpota, quia inde solutio pro quovis alio numero facile concludi poterit. Pervenerit elapso tempore t tubus cum corporibus in situm, quem figura repræsentat, versenturque tria hæc corpora in P, Q & R; sit massa primi in $P = A$; secundi in $Q = B$, & tertii in $R = C$, vocenturque distantiæ eorum $AP = x$, $AQ = y$ & $AR = z$, Deinde sit massa tubi seu totius corporis $ABC = M$, & spatium motu jam confectum a puncto fixo O, vocetur $OB = s$. Quatenus ergo hæc corpora in tubo progrediuntur, corpus P cujus celeritas est $= \frac{dx}{dt}$ secundum directionem PB sollicitari debet vi $= \frac{2Addx}{dt^2}$, corpus Q cujus celeritas est $= \frac{dy}{dt}$ vi $= \frac{2Bddy}{dt^2}$, & corpus R cujus celeritas est $= \frac{dz}{dt}$ vi $= \frac{2Cddz}{dt^2}$, sumto elemento dt constante. Deinde quia hæc corpora quoque motum cum tubo secundum directiones ipsi OV parallelas habent communem celeritate $\frac{ds}{dt}$; corpus P in dire-

directione P E urgeri oportet vi $= \frac{2 A dds}{dt^2}$, corpus Q in directione Q F vi $= \frac{2 B dds}{dt^2}$ & corpus R in directione R G vi $= \frac{2 C dds}{dt^2}$. Ipse denique tubus secundum directionem BV propelli debet vi $= \frac{2 M dds}{dt^2}$. His ergo viribus æquales statui debebunt eæ, quibus tam corpora, quam tubus actu sollicitantur. Quæ cum cognitæ assumantur ad easdem directiones reduci debent, sicque totidem resultabunt æquationes, quot ad problema resolvendum requiruntur. In hoc scilicet versatur totius methodi, qua hic utimur, vis, ut vires quæ ex natura motus adesse debere colliguntur, iis quæ revera sollicitant, æquales ponantur.

§. XXXI. Ad vires autem sollicitantes referri oportet pressiones, quas corpora in se invicem exercent, quæ etsi sunt incognitæ, tamen si in calculum introducantur, inde innotescent. Sit igitur pressio, quam corpus P in tubum exerit $=$ P, pressio corporis Q $=$ Q & pressio corporis R $=$ R, quarum pressionum directiones erunt rectæ P L, Q M & R N ad A B normales. Ergo ob æqualitatem inter actionem & reactionem corpus P in directione P *l* urgebitur vi $=$ P, corpus Q in directione Q *m* vi $=$ Q & corpus R in directione R *n* vi $=$ R. Hæ jam vires corpora P, Q & R sollicitantes resolvantur secundum directiones A B & O V, repe-rieturque

	secundum	sollicitari	secundum	sollicitari
Corpus P	P B	vi $= \frac{-P\cos\theta}{\sin\theta}$	P E	vi $= -\frac{P}{\sin\theta}$
Corpus Q	Q B	vi $= \frac{-Q\cos\theta}{\sin\theta}$	Q B	vi $= -\frac{Q}{\sin\theta}$
Corpus R	R B	vi $= -\frac{R\cos\theta}{\sin\theta}$	R G	v $= -\frac{R}{\sin\theta}$

Ipse autem tubus seu corpus A B C a viribus P R $=$ P, Q M $=$ Q & R N $=$ R secundum directionem motus sui B V sollicitabitur vi $= P\sin\theta + Q\sin\theta + R\sin\theta$ Quamobrem si nullæ aliæ vires externæ corpora impellerent, sequentes haberemus æquationes:

$$\text{I. } \frac{2A\,ddx}{dt^2} = \frac{-P\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{II. } \frac{2A\,dds}{dt^2} = \frac{-P}{\sin\theta}$$

$$\text{III. } \frac{2B\,ddy}{dt^2} = \frac{-Q\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{IV. } \frac{2B\,dds}{dt^2} = \frac{-Q}{\sin\theta}$$

$$\text{V. } \frac{2C\,ddz}{dt^2} = \frac{-R\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{VI. } \frac{2C\,dds}{dt^2} = \frac{-R}{\sin\theta}$$

$$\text{VII. } \frac{2M\,dds}{dt^2} = P\sin\theta + Q\sin\theta + R\sin\theta.$$

Ex quibus æquationibus sequitur fore pressiones $P = o$, $Q = o$, & $R = o$, atque singula corpora motu uniformi, eo scilicet qui ipsis initio erat impressus, perpetuo esse progressura.

§. XXXII. Impellantur autem singula hæc corpora gravitate naturali deorsum, sitque recta O V horizontalis, & cum corporum P, Q, R pondera sint A, B, C, ex resolutione supra-

ſupra inſtituta (23.) ſequentes vires, quæ corpora ſecundum directiones AB & OV ſollicitabunt, emergent.

	ſecundum	ſollicitabitur	ſecundum	ſollicitabitur
Corpus P	P B	vi $= \frac{A}{\sin\theta}$	P E	vi $= \frac{A \cos\theta}{\sin\theta}$
Corpus Q	Q B	vi $= \frac{B}{\sin\theta}$	Q F	vi $= \frac{B \cos\theta}{\sin\theta}$
Corpus R	R B	vi $= \frac{C}{\sin\theta}$	R G	vi $= \frac{C \cos\theta}{\sin\theta}$.

Motus autem tubi, quia eſt horizontalis, ab ejus gravitate prorſus non afficietur. Hæ ergo vires cum præcedentibus expreſſionibus junctæ ſequentes præbebunt æquationes:

$$\text{I. } \frac{2\mathcal{A}\,ddx}{dt^2} = \frac{\mathcal{A} - \text{P}\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{II. } \frac{2\mathcal{A}\,dds}{dt^2} = \frac{\mathcal{A}\cos\theta - \text{P}}{\sin\theta}$$

$$\text{III. } \frac{2\text{B}\,ddy}{dt^2} = \frac{\text{B} - \text{Q}\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{IV. } \frac{2\text{B}\,dds}{dt^2} = \frac{\text{B}\cos\theta - \text{Q}}{\sin\theta}$$

$$\text{V. } \frac{2\text{C}\,ddz}{dt^2} = \frac{\text{C} - \text{R}\cos\theta}{\sin\theta}; \qquad \text{VI. } \frac{2\text{C}\,dds}{dt^2} = \frac{\text{C}\cos\theta - \text{R}}{\sin\theta}$$

$$\text{\& VII. } \frac{2\text{M}\,dds}{dt^2} = \text{P}\sin\theta + \text{Q}\sin\theta + \text{R}\sin\theta.$$

Ex æquationibus II, IV, VI & VII conficietur hæc:

$$\frac{2(\text{M} + \mathcal{A}\sin\theta^2 + \text{B}\sin\theta^2 + \text{C}\sin\theta^2)\,dds}{dt^2} = (\text{A} + \text{B} + \text{C})\sin\theta\cos\theta,$$

& $\frac{2dds}{dt^2} = \frac{(\text{A} + \text{B} + \text{C})\sin\theta\cos\theta}{\text{M} + (\mathcal{A} + \text{B} + \text{C})\sin\theta^2}$ Quo valore ſubſtituto preſſiones P, Q, R ſequenti modo definientur,

 P =

$$P = \frac{A M \cos\theta}{M + (A + B + C) \sin\theta^2}$$

$$Q = \frac{B M \cos\theta}{M + (A + B + C) \sin\theta^2}$$

$$R = \frac{C M \cos\theta}{M + (A + B + C) \sin\theta^2}$$

quæ ergo ſingulæ ſunt conſtantis quantitatis.

§. XXXIII. Primum ergo motus plani inclinati ex æquatione $\frac{2dds}{dt^2} = \frac{(A+B+C) \sin\theta \cos\theta}{M+(A+B+C) \sin\theta^2}$ cognoſcetur, erit enim ejus celeritas $\frac{ds}{dt} = \frac{(A+B+C)\, t \sin\theta \cos\theta}{2M + 2(A+B+C) \sin\theta^2}, + \mathfrak{M}$, & ipſum ſpatium $OB = s = \frac{(A+B+C)\, tt \sin\theta \cos\theta}{4M + 4(A+B+C) \sin\theta^2} + \mathfrak{M}t + m.$ Deinde ſi loco preſſionum P, Q, R valores inventi ſubſtituantur, reperietur:

$\frac{2ddx}{dt^2} = \frac{(A+B+C+M) \sin\theta}{M + (A+B+C) \sin\theta^2} = \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{2ddz}{dt^2}$; unde intelligitur ſingula corpora in tubo æquales accelerationes habere. Elapſo ergo tempore t celeritates corporum in tubo ita ſe habebunt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(A+B+C+M)\, t \sin\theta}{2M + 2(A+B+C) \sin\theta^2} + \mathfrak{A}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(A+B+C+M)\, t \sin\theta}{2M + 2(A+B+C) \sin\theta^2} + \mathfrak{B}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(A+B+C+M)\, t \sin\theta}{2M + 2(A+B+C) \sin\theta^2} + \mathfrak{C}$$

Denique

Denique ad datum tempus diſtantiæ corporum in tubo a puncto ejus ſummo A ita definientur, ut ſit

$$AP = x = \frac{(A+B+C+M)\,tt\,\sin\theta}{4M+4(A+B+C)\sin\theta^2} + \mathfrak{A}\,t + \mathfrak{a},$$

$$AQ = y = \frac{(A+B+C+M)\,tt\,\sin\theta}{4M+4(A+B+C)\sin\theta^2} + \mathfrak{B}\,t + \mathfrak{b}$$

$$AR = z = \frac{(A+B+C+M)\,tt\,\sin\theta}{4M+4(A+B+C)\sin\theta^2} + \mathfrak{C}\,t + \mathfrak{c}$$

ubi conſtantes quantitates ex motu initiali determinari debent. Ceterum patet, hos omnes motus eſſe uniformiter acceleratos, atque principium conſervationis virium vivarum in iis locum habere. Ex his autem formulis facile erit ſolutionem ad plura corpora transferre, atque ſi inſuper corpora cum tubo a viribus quibuscunque ſollicitentur, inventio æquationum differentio - differentialium nulla difficultate laborabit, cum tantum opus ſit, ut vires ſollicitantes ſecundum binas motus directiones reſolvantur.

§. XXXIV. Quoniam hæc abunde ſuffiiciunt ad motum corporum in tubo recto mobili cognoſcendum, progredior ad tubum curvilineum. Sit igitur tubus curvilineus APB mobilis ſecundum lineam rectam OV, cui baſi ſua BC incumbit ita, ut ſuper ea rependo progrediatur. Sit maſſa corporis tubo incluſi $= A$, maſſa ipſius tubi ſeu corporis $ABC = M$, & elapſo tempore t pervenerit tubus in ſitum, quem figura exhibet, & corpus ipſi incluſum jam ſit in P. Vocetur ſpatium a tubo jam percurſum $OB = s$; & longitudo *Tab. II. Fig. 9.*

tudo ſpatii curvilinei in tubo $AP = x$. Ducatur in P tangens PT, angulusque PTQ ponatur $= \Phi$, qui ob figuram tubi curvam erit variabilis; ſit R centrum circuli oſculantis curvam in P, eritque radius oſculi $PR = \frac{-dx}{d\Phi}$, qui vocetur $= r$. Jam corpus in tubo progredietur ſecundum tangentem PT celeritate $= \frac{dx}{dt}$, ad quem motum neceſſe eſt ut corpus ſecundum directionem PT ſollicitetur vi $= \frac{2Addx}{dt^2}$. Deinde vero ut corpus in P motu ſuo curvaturam tubi ſequatur, oportet ut ſecundum directionem radii oſculi PR $= r$ urgeatur vi $= \frac{2A\,dx^2}{r\,dt^2}$ (16), ſeu cum ſit $r = \frac{-dx}{d\Phi}$, hæc vis erit $= \frac{2A\,dx\,d\Phi}{dt^2}$, quæ ſecundum directiones PT & PS reſoluta dat pro directione $PT = \frac{2A\,dx\,d\Phi\cos\Phi}{dt^2\sin\Phi}$ & pro directione PS vim $= \frac{2A\,dx\,d\Phi}{dt^2\sin\Phi}$. Porro quia motus tubi ipſi quoque corpori eſt communis, tubus autem ſecundum directionem OV progreditur celeritate $= \frac{ds}{dt}$, in corpore P etiam inerit celeritas ſecundum directionem PS ipſi OV parallelam, quæ erit $= \frac{ds}{dt}$, ad quam conſervandam corpus in directione PS ſollicitari debet vi $= \frac{2A\,dds}{dt^2}$.

Omnino ergo corpus P in directione P T sollicitatur vi $= \frac{2\text{A}ddx}{dt^2} + \frac{2\text{A}dxd\Phi \operatorname{cos}\Phi}{dt^2 \operatorname{sin}\Phi}$ & in directione P s vi $= \frac{2\text{A}dds}{dt^2}$ $\frac{2\text{A}dxd\Phi}{dt^2 \operatorname{sin}\Phi}$. Denique motus tubi requirit vim secundum directionem B V vel aliam ipsi parallelam sollicitantem $= \frac{2Mdds}{dt^2}$. Hæque sunt vires ad motum, quem adesse concipimus, conservandum necessariæ: quibus eæ vires, quibus tam corpus in tubo, quam ipse tubus actu sollicitantur, æquales sunt ponendæ, ut solutio inde adornari possit.

§. XXXV. Nunc primum pressio corporis in tubum est consideranda, quæ secundum directionem P N urgens sit $= \text{P}$, atque ipsum corpus secundum directionem oppositam PR reprimetur. Hæc vis in corpus P agens secundum directiones motus P T & P S resoluta dabit pro directione P T vim $= \frac{-P \operatorname{cos}\Phi}{\operatorname{sin}\Phi}$ & pro directione P S vim $= -\frac{P}{\operatorname{sin}\Phi}$; ipse vero tubus ab hac pressione pelletur secundum directionem B V vi $= P \operatorname{sin}\Phi$. Quodsi jam nullæ vires præterea corpora urgeant, hinc habebimus sequentes æquationes:

I. $\frac{2\text{A}ddx}{dt^2} + \frac{2\text{A}dxd\Phi \operatorname{cos}\Phi}{dt^2 \operatorname{sin}\Phi} = \frac{-P \operatorname{cos}\Phi}{\operatorname{sin}\Phi}$

II. $\frac{2\text{A}dds}{dt^2} + \frac{2\text{A}dxd\Phi}{dt^2 \operatorname{sin}\Phi} = \frac{-P}{\operatorname{sin}\Phi}$

III. $\frac{2Mdds}{dt^2} = P \operatorname{sin}\Phi$.

Ex

Ex fecunda & tertia eliminando dds elicietur hæc æquatio $\frac{2AMdxd\Phi}{dt^2 \sin\Phi} = \frac{-MP}{\sin\Phi} - AP \sin\Phi$, quæ dat $P = -\frac{2AMdxd\Phi}{(M + A\sin\Phi^2)dt^2}$. Prima vero & fecunda eliminando P præbet $ddx = dds \cos\Phi$, feu $dds = \frac{ddx}{\cos\Phi}$, deinde valor ipfius P in tertia æquatione fubftitutus producit: $\frac{dds}{dt^2} = \frac{-Adxd\Phi \sin\Phi}{(M + A\sin\Phi^2)dt^2}$ feu $dds = \frac{-Adxd\Phi \sin\Phi}{M + A\sin\Phi^2}$ qui bini ipfius dds valores præbent hanc æquationem $\frac{ddx}{\cos\Phi} + \frac{Adxd\Phi \sin\Phi}{M + A\sin\Phi^2} = o$ feu $\frac{ddx}{dx} + \frac{Ad\Phi \sin\Phi \cos\Phi}{M + A\sin\Phi^2} = o$ cujus integrale eft $ldx + \frac{1}{2}l(M + A\sin\Phi^2) = ladt$; feu $dt = \frac{dx}{a}V(M + A\sin\Phi^2)$. Hinc porro efficitur: $\frac{dds}{dt} = \frac{-aAd\Phi \sin\Phi}{(M + A\sin\Phi^2)^{3:2}}$, cujus integrale eft $\frac{ds}{dt} = \frac{aA\cos\Phi}{(A + M)V(M + A\sin\Phi^2)} + \mathfrak{C}$ & $ds = \frac{Adx\cos\Phi}{A + M} + \frac{\mathfrak{C}dx}{a}V(M + A\sin\Phi^2)$; cum igitur detur æquatio inter x & Φ totus motus cognofcitur.

§. XXXVI. Animetur jam corpus in P gravitate naturali fitque recta OV horizontalis, atque corpus in P, cujus maffa $=$ A, fecundum rectam PQ ad OV perpendicularem urgebitur vi $=$ A. Refolvatur hæc vis fecundum directiones motus corporis PT & PS, prodibitque vis fecundum

PT

PT agens $= \frac{A}{\sin\varphi}$, & vis ſecundum PS $= \frac{A\cos\varphi}{\sin\varphi}$. Si jam hæ vires inſuper in formulas præcedentes introducantur, prodibunt ſequentes æquationes:

$$\text{I.}\quad \frac{2A\,ddx}{dt^2} + \frac{2A\,dx\,d\varphi\cos\varphi}{dt\sin\varphi} = \frac{A - P\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$\text{II.}\quad \frac{2A\,dds}{dt^2} + \frac{2A\,dx\,d\varphi}{dt^2\sin\varphi} = \frac{A\cos\varphi - P}{\sin\varphi}$$

$$\text{III.}\quad \frac{2M\,dds}{dt^2} = P\sin\varphi.$$

Ex ſecunda & tertia eliminetur $\frac{dds}{dt^2}$, & oritur:

$$\frac{2AM\,dx\,d\varphi}{dt\sin\varphi} = \frac{AM\cos\varphi - MP - AP\sin\varphi^2}{\sin\varphi}$$

unde fit $P = \frac{AM\cos\varphi}{M + A\sin\varphi^2} - \frac{2AM\,dx\,d\varphi}{(M + A\sin\varphi^2)dt^2}$

qui valor in prima æquatione ſubſtitutus præbet:

$\frac{2ddx}{dt^2} + \frac{2dx\,d\varphi\cos\varphi}{dt^2\sin\varphi} = \frac{(M+A)\sin\varphi}{M+A\sin\varphi^2} + \frac{2M\,dx\,d\varphi\cos\varphi}{(M+A\sin\varphi^2)dt^2\sin\varphi}$ ſeu

$\frac{2ddx}{dt^2} + \frac{2A\,dx\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{(M+A\sin\varphi^2)dt^2} = \frac{(M+A)\sin\varphi}{M+A\sin\varphi^2}$. Multiplicetur hæc æquatio per $(M + A\sin\varphi^2)dx$, prodibitque:

$$\frac{2M\,dx\,ddx + 2A\,dx\,ddx\sin\varphi^2 + 2A\,dx^2\,d\varphi\sin\varphi\cos\varphi}{dt^2}$$

$= (M+A)\,dx\sin\varphi$; cujus integrale eſt:

$\frac{M\,dx^2 + A\,dx^2\sin\varphi^2}{dt^2} = (M+A)\int dx\sin\varphi$; unde obtinetur

 $dt =$

$dt = dx\sqrt{\frac{M + A\,\text{fin}\,\phi^2}{(M+A)\int dx\,\text{fin}\,\phi}}$. At ductis ad axem verticalem A C applicatis infinite propinquis P S & ps, ob $Pp = dx$ erit $Ss = dx\,\text{fin}\,\phi$, ideoque $\int dx\,\text{fin}\,\phi = AS$. Posita ergo hac abscissa $AS = p$, erit $dt = dx\sqrt{\frac{M+A\,\text{fin}\,\phi^2}{(M+A)p}} = \sqrt{\frac{M dx^2 + A dp^2}{(M+A)p}}$; quare cum natura curvæ APB sit cognita ac propterea relatio inter p & x, ad datum tempus locus corporis P super curva APB determinari poterit.

§. XXXVII. Ad motum autem ipsius tubi seu quantitatem s determinandam sumatur æquatio tertia $\frac{2M dds}{dt} = P dt\,\text{fin}\,\phi$ $= P dx\,\text{fin}\,\phi\sqrt{\frac{M + A\,\text{fin}\,\phi^2}{(M+A)\int dx\,\text{fin}\,\phi}}$; substituatur hic loco P valor ante inventus, qui posito loco dt valore jam reperto erit

$$P = \frac{A M\,\text{cof}\,\phi}{M + A\,\text{fin}\,\phi^2} - \frac{2AM(M+A)\,d\phi\int dx\,\text{fin}\,\phi}{(M + A\,\text{fin}\,\phi^2)\,dx}$$

hincque proveniet: $\frac{2M dds}{dt} =$

$$\frac{AM dx\,\text{fin}\,\phi\,\text{cof}\,\phi}{\sqrt{(M+A\,\text{fin}\,\phi^2)(M+A)\int dx\,\text{fin}\,\phi}} - \frac{2AM d\phi\,\text{fin}\,\phi\sqrt{(M+A)\int dx\,\text{fin}\,\phi}}{(M + A\,\text{fin}\,\phi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quæ feliciter est integrabilis, integrata enim dat:

$\frac{ds}{dt} = \frac{A\,\text{cof}\,\phi\sqrt{\int dx\,\text{fin}\,\phi}}{\sqrt{(M+A)(M + A\,\text{fin}\,\phi^2)}}$, ad quam si initio, cum corpus erat in A, tubus quieverit, nullam constantem adjicere necesse est. Dat ergo hæc expressio celeritatem tubi, qua secundum horizontem B V progreditur. Ex ea autem si loco

ſi loco dt valor ante inventus ſubſtituatur, orietur $ds = \frac{Adx \operatorname{cos}\Phi}{M+A}$ & propterea $s = \frac{A\int dx \operatorname{cos}\Phi}{A+M}$. Quare ſi ut ante poſuimus abſciſſam AS $= p$, vocetur applicata PS $= q$ erit $dq = dx \operatorname{cos}\Phi$, ac propterea $s = \frac{Aq}{A+M}$. Si quidem tubi punctum B initio fuerit in O. Eadem hæc æquatio facilius invenitur, ſi æquationum ſupra repertarum prima per $\operatorname{cos}\Phi$ multiplicata a ſecunda ſubtrahatur, prodibit enim:

$$\frac{2Adds}{dt^2} - \frac{2Add\operatorname{cos}\Phi}{dt^2} + \frac{2Adxd\Phi\operatorname{sin}\Phi}{dt^2} = -P\operatorname{sin}\Phi.$$

Cum jam ex tertia ſit $P\operatorname{sin}\Phi = \frac{2Mdds}{dt^2}$, erit diviſione per $\frac{2}{dt^2}$ inſtituta:

$$(A+M)\,dds = Addx\operatorname{cos}\Phi - Adxd\Phi\operatorname{sin}\Phi$$

quæ integrata dat:

$$(A+M)\,ds = Adx\operatorname{cos}\Phi \;\&\; ds = \frac{Adx\operatorname{cos}\Phi}{A+M}$$

uti modo inveneramus. Sic igitur totum motum corporis gravis in tubo quocunque curvilineo ſuper plano horizontali mobili determinavimus.

§. XXXVIII. Hinc motus oſcillatorius determinari poteſt corporis ſuper curva ſecundum horizontem mobili moti. *Tab. II. Fig. 10.* Sit enim propoſita curva ABa, quæ baſi ſua Cc plano horizontali O V ita incumbat ut ſine frictione ultro citroque promoveri poſſit. Habeat hæc curva duos ramos AB, aB

 ſimi-

ſimiles & æquales & tangens ejus in B ſit horizontalis. Inceperit corpus, cujus maſſa $= A$ deſcenſum ex puncto A, & nunc elapſo tempore pervenerit in P; ex A demittatur perpendicularis AC, ad eamque ex P ducatur horizontalis PS, ſit maſſa totius molis A C $c\,a = M$, & vocatis A S $= p$, P S $= q$, & arcu A P $= x$, erit $dp = dx$ ſin Φ & $d\,q = dx$ coſ q; atque elementum temporis dt ita exprimetur ut ſit $dt = V\,\frac{Mdx^2 + Adp^2}{(M+A)p}$. Conſideretur autem recta verticalis DBE inſtar axis, & vocetur BE $= a$; BM $= u$; PM $= v$ & BP $= z$; erit $p = a - u$; $d\,p = -d\,u$ & $dx^2 = dz^2 = du^2 + dv^2$. Ex his elementum temporis conficitur $dt = V\,\frac{Mdz^2 + Adu^2}{(M+A)(a-u)}$: cujus integrale, ſi ita ſumatur ut evaneſcat poſito $u = a$, definiet tempus deſcenſus per arcum A P, atque ſi ponatur $u = o$, prodibit tempus dimidiæ oſcillationis ſeu deſcenſus per arcum AB. Quod ſi jam quæratur, cujusmodi eſſe debeat curva APB, ut ubicunque corpus in ea deſcenſum inchoaverit, perpetuo eodem tempore ad imum punctum B perveniat: hæc quæſtio ad tautochroniſmum pertinet; cui ſatisfiet, ſi elementum temporis ita exprimatur, $dt = \frac{du\,Vc}{V(au-uu)}$. Hinc fiet $\frac{M\,dz^2 + A\,du^2}{(M+A)(a-u)} = \frac{c\,du^2}{u(a-u)}$ ſeu $M\,dz^2 + A\,du^2 = \frac{(M+A)\,c\,du^2}{u}$ in qua, cum conſtans arbitraria a non amplius inſit, hæc æquatio exprimet naturam curvæ quæſitæ.

Erit

Erit ergo $dz^2 = \frac{du^2((M+A)c - Au)}{Mu}$ & $dv^2 = \frac{(M+A)\, du^2 (c-u)}{Mu}$, ideoque $dv = du \sqrt{\frac{(M+A)(c-u)}{Mu}}$; quam curvam patet eſſe cycloidem elongatam, quæ ex cycloide ordinaria, ſeu tautochrona immobili conſtruitur, ſi hujus applicatæ augeantur in ratione 1 ad $\sqrt{\frac{M+A}{M}}$. Perſpicuum enim eſt, ſi maſſa M ponatur infinita, cycloidem communem prodire.

Sectio II.

De motu corporum in tubis circa axem fixum mobilibus.

§. XXXIX.

Cum ea, quæ ſpectant ad motum corporum tubis incluſorum, in præcedente ſectione jam ſint tradita, huic ſectioni tantum erunt præmittenda præcepta de motu corporum circa axem fixum mobilium, ex quibus pateat, quomodo iſte motus a quibusvis viribus ſollicitantibus alteretur. Corpora autem hic contemplamur inflexibilia, quorum ſingulæ partes cum inter ſe, tum ab axe fixo perpetuo easdem teneant diſtantias. Sit igitur axis iſte fixus, circa quem corpus quodpiam eſt mobile, normalis ad planum tabulæ, idque trajiciat in puncto O, ſintque A, B, C particulæ quæcunque corporis in hoc plano ſitæ, quarum diſtan- *Tab. II. Fig. 11.*

distantiæ ab axe sint O A, O B, O C. Durante ergo motu quocunque circa axem O, istæ particulæ non solum perpetuo in eodem plano perseverabunt, sed etiam tam ipsarum distantiæ AO, BO, CO, quam anguli AOB, AOC, BOC manebunt ejusdem magnitudinis. Deinde ratione plagæ iste motus duplex esse poterit, vel enim particulæ A, B, C gyrabuntur dextrorsum secundum A*a*, B*b*, C*c*, vel sinistrorsum in plagam contrariam: atque si una particula A dextrorsum secundum *Aa* gyretur, necesse est ut omnium reliquarum motus secundum eandem plagam sit directus. Neque vero hoc solum de particulis in plano hoc constitutis valet, sed etiam de omnibus ad idem corpus pertinentibus, quæ extra hoc planum versantur. Per singula scilicet axis puncta similia plana ad axem normalia concipiantur, & in quo plano quæpiam particula, dum corpus quiescit, erit sita, in eodem quoque, dum corpus motu gyratorio cietur, perpetuo permanebit. Tum vero similiter necesse est, ut omnium horum planorum motus eandem plagam sequatur.

§. XL. Cum igitur quælibet particula A eandem constanter distantiam AO ab axe O servet, motu circulari movebitur, circulumque describet, cujus centrum sit in O. Quia deinde diversæ particulæ B, C eodem intervallo angulari a se invicem perpetuo distant, earum celeritates distantiis ab axe O erunt proportionales. Primum ergo directiones motus A*a*, B*b*, C*c*, ad rectas OA, OB, OC erunt normales, atque celeritates his distantiis erunt proportionales.

Unde

Unde ſi celeritas particulæ A debita ſit altitudini u, ſeu $= \sqrt{u}$, ex ea omnium reliquarum particularum celeritates cognoſcentur. Particulæ ſcilicet B celeritas erit $= \frac{OB}{OA} \sqrt{u}$, & particulæ C celeritas $= \frac{OC}{OA} \sqrt{u}$. Cujusque ergo particulæ celeritas per ejus diſtantiam ab axe diviſa dabit quotum conſtantem, qui cum per eum totus motus rotatorius definiatur, celeritas angularis vocari ſolet. Hinc ſi puncti ab axe O intervallo $= f$ remoti celeritas vera ſit $= \sqrt{u}$, erit totius corporis celeritas angularis $= \frac{\sqrt{u}}{f}$; ex eaque omnium corporis punctorum celeritates cognoſcentur, erit namque puncti B celeritas in directione Bb ad OB normali $= \frac{OB}{f} \sqrt{u}$, & altitudo huic celeritati debita $= \frac{OB^2 u}{ff}$. Atque ſi corporis particula proponatur extra planum OABC ſita, per eam ductum concipiatur planum ad axem normale, in hocque plano a particula ad axem ducatur recta, quæ ad eum erit normalis. Quo facto hujus particulæ motus in eodem plano fiet, ſecundum eam plagam, in quam totus motus dirigitur, atque ſi iſtius particulæ ab axe diſtantia ſit $= x$, erit ejus celeritas $= \frac{x\sqrt{u}}{f}$. Unde intelligitur ſi corporis, quod circa axem fixum eſt mobile, unius puncti motus ſit cognitus, ex eo omnium particularum, atque ideo totius corporis motum determinari.

§. XLI.

§. XLI. Si unicum corpuſculum A circa axem fixum gyraretur, neque id in motu ſuo ullam reſiſtentiam inveniret, neque ab ulla vi externa ſollicitaretur, tum id motu uniformi perpetuo gyrari eſſet perrecturum, neque ob axem ullam motus perturbationem eſſet perpeſſurum. Quod idem cum de ſingulis particulis B, C, ſit intelligendum manifeſtum eſt omne corpus, cui motus gyratorius circa axem fixum ſemel ſit impreſſus eundem motum perpetuo eſſe conſervaturum, niſi a viribus externis ſollicitetur. Quare & hoc caſu primum principium motus, quo omne corpus vi quadam inſita, quæ inertia vocatur, in eodem motus ſtatu perſeverare affirmatur, locum tenet. Cum autem ſingulæ particulæ non in directum ſed motu circulari ferantur, vi centrifuga gaudebunt, dum ab axe O recedere conabuntur: at quia axis fixus aſſumitur, hæ vires nullum effectum exerere poterunt. Interim tamen operæ pretium erit inveſtigare, quantam vim ſingula axis puncta ab his conatibus centrifugis ſuſtineant. Sit igitur particulæ ab axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas $= \sqrt{u}$, erit particulæ A celeritas $= \frac{OA\sqrt{u}}{f}$ & altitudo debita huic celeritati $= \frac{OA^2.u}{ff}$. Cum jam particula A, cujus maſſa ſit $= A$, hac celeritate circulum deſcribat, cujus radius $= OA$, ad particulam in hoc motu curvilineo continendam vis requiritur $= 2A. \frac{OA^2 u}{ff} : OA =$

2 A.

$\frac{2A.OA.u}{ff}$ (16), qua particula A in directione AO urgeatur. Viciſſim ergo axis punctum O ſecundum directionem OA trahetur vi $= \frac{2A.OA.u}{ff}$, ſimilique modo, ſi particularum in B & C maſſæ ſint B & C, axis punctum O in directionibus OB, OC trahetur viribus $\frac{2B.OB.u}{ff}$; $\frac{2C.OC.u}{ff}$. Hinc ſi omnium particularum ad planum OABC pertinentium centrum gravitatis ſit in G, omniumque ſimul ſumtarum maſſa $= M$, ab earum viribus centrifugis conjunctim axis punctum O ſollicitabitur ſecundum directionem OG vi $= \frac{2M.OG.u}{ff}$, hoc eſt perinde, ac ſi omnes particulæ plani OABC in earum centro gravitatis G eſſent collectæ. Similique modo vires, quibus ſingula reliqua axis puncta urgentur, definiri poterunt; ex quibus ſimul conſideratis patebit, quanta vi opus ſit ad axem in ſitu immobili continendum.

§. XLII. Quo nunc facilius definire queamus, quantum quælibet vis externa motum hunc gyratorium ſit perturbatura, primum inveſtigemus, cujusmodi vires requirantur ad datam accelerationem motui rotatorio inducendam. Sit igitur puncti ab axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas debita altitudini u, quæ dum id punctum per angulum infinite parvum $d\omega$ promovetur, augmentum capiat $= du$. Nunc, cum particulæ A celeritas ſit debita altitudini $\frac{OA^2.u}{ff}$, dum ea

pariter per angulum $d\omega$ circa O procedit, percurret ſpatiolum $Aa = OA . d\omega$, & quia interea altitudo ejus celeritati debita $\frac{OA^2 . u}{ff}$, incrementum capit $= \frac{OA^2 . du}{ff}$ ad hoc incrementum generandum oportet, ut particula A in directione Aa ſollicitetur vi $= A . \frac{OA^2 . du}{ff} : OA . d\omega = \frac{A . OA . du}{ff d\omega}$. Similique modo particula B in directione Bb ſollicitetur neceſſe eſt vi $= \frac{B . OB . du}{ff d\omega}$, & particula C in directione Cc vi $= \frac{C . OC . du}{ff d\omega}$. Jam omnium harum virium ſumma momentorum ad axem O relatorum eſt $= \frac{du}{ff d\omega}(A . OA^2 + B . OB^2 + C . OC^2 + \&c.)$; quoniam enim corpus circa axem O eſt mobile, virium ſollicitantium momenta ad eundem axem referri oportet. Si ergo + vis ſollicitantis momentum ad axem O relatum ſit $= \frac{ffdu}{d\omega}(A . OA^2 + B . OB^2 + C . OC^2 + \&c.)$ ab ea vi ſollicitante motus corporis rotatorius ita accelerabitur, ut cum puncti ab axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas ſit debita altitudini u, dum corpus motu gyratorio circa axem O per angulum infinite parvum $d\omega$ progreditur, altitudo u incrementum capiat $= du$. Hinc ſi momentum vis ſollicitantis ſit $= Pg$, acceleratio motus rotatorii inde oriunda hac æquatione exprimetur:

$$du = \frac{Pg . ff d\omega}{A . OA^2 + B . OB^2 + C . OC^2 + \&c.}$$

§. XLIII.

§. XLIII. Ad accelerationem ergo a quavis vi ſollicitante ortam inveniendam primum iſtius vis momentum reſpectu axis O eſt definiendum, quod fit, ſi planum ad axem normale per directionem iſtius vis ducatur, ipſaque vis per reſolutionem ad hoc planum reducatur, altera, quæ ad hoc planum eſt normalis, omiſſa & ex puncto axis, quo ab hoc plano ſecatur, in directionem vis perpendiculum demittatur, atque ipſa vis per hoc perpendiculum multiplicetur. Sic ſi ipſa vis fuerit $= P$ atque hoc perpendiculum $= g$, erit momentum vis reſpectu axis $= Pg$, quod in formulam inventam ingreditur. Deinde ſingulæ corporis particulæ per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe multiplicari & in unam ſummam colligi debent, ut obtineatur valor denominatoris $A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 +$ &c. Hæc ergo ſumma erit productum ex maſſa in quadratum cujuspiam lineæ, ideoque ſi maſſa totius corporis ponatur $= M$, hujusmodi habebit formam Mkk; ſemper ſcilicet valor lineæ k aſſignari poteſt, ut expreſſio Mkk æqualis fiat ſummæ productorum $A.OA^2 + B.OB^2 + C.OC^2 +$ &c. Quantitatem hanc Mkk vocabimus momentum inertiæ corporis ad axem rotationis O relatum: unde ſi cognitum fuerit & momentum vis ſollicitantis Pg, & momentum inertiæ corporis Mkk utrumque ad axem rotationis relatum, hinc acceleratio motus rotatorii facile definietur, erit enim $du = \frac{Pg.\,ff\,d\omega}{Mkk}$, quæ acceleratio punctum corporis ab axe intervallo $= f$

 diſtan-

diſtantis reſpicit, cujus celeritas debita eſt altitudini u, hancque accelerationem accipit, dum corpus motu gyratorio per angulum infinite parvum $d\omega$ progreditur. Hoc autem tenendum eſt, ſi momentum vis ſollicitantis in eandem plagam vergat, in quam fit motus; ſi enim in plagam oppoſitam tenderet, motus tantumdem retardaretur, foretque $du = \frac{-Pg \cdot ff d\omega}{Mkk}$.

§. XLIV. Momentum hoc inertiæ, a quo acceleratio ſeu retardatio motus rotatorii pendet, ingreditur quoque in calculum centri oſcillationis, ita ut ſi centrum oſcillationis fuerit inventum, inde ſimul momentum inertiæ reſpectu axis gyrationis innoteſcat. Quæ convenientia quo clarius appareat, ex his ipſis principiis centrum oſcillationis, quod vulgo ex principiis alienis derivari ſolet, tanquam ex proprio fonte
Tab. II. Fig. 12. inveſtigemus. Sit igitur O axis fixus ad planum tabulæ normalis, & horizontalis, ita ut planum tabulæ tanquam verticale ſit ſpectandum; circa hunc axem oſcilletur corpus ABCF, cujus maſſa & pondus ſit $= M$, & centrum gravitatis in G. Ducatur recta OG, quæ a verticali Og diſtet angulo GO$g = \Phi$, quo angulo elongatio corporis a ſitu quietis menſuratur, ſi enim centrum gravitatis G in lineam Og perveniat, corpus quieſcet, niſi haberet motum inſitum. Sumatur diſtantia OF $= f$, ſitque puncti F celeritas debita altitudini u, qua verſus rectam verticalem Of accedat, & puncto temporis per angulum $d\omega = -d\Phi$ progrediatur. Sit momentum inertiæ hujus corporis $= Mkk$, & cum corpus

pus urgeatur a gravitate naturali, quæ erit $= M$, hujus vis directio G P erit verticalis & per corporis centrum gravitatis transibit, ejus ergo momentum respectu axis O erit $= M. OG. \sin \Phi$, motumque accelerabit, unde habebitur $du = \frac{M. OG. \sin \Phi. ff d\omega}{Mkk} = \frac{OG. \sin \Phi. ff d\omega}{kk}$. Concipiatur nunc loco corporis particula infinite parva in H, cujus massula sit $= m$, pondusque $HQ = m$, unde ejus momentum $= m. OH \sin \Phi$; momentum autem inertiæ $= m. OH^2$. Quare si hæc particula sola adesset, foret $du = \frac{m. OH. \sin \Phi. ff d\omega}{m. OH^2} = \frac{\sin \Phi. ff d\omega}{OH}$. Si jam hujus particulæ *H* motus fuerit conformis motui totius corporis, erit $\frac{OG}{kk} = \frac{1}{OH}$ seu $OG. OH = kk$. Punctum autem H hujus naturæ, ut particula infinite parva loco totius corporis ibi constituta eundem habitura sit motum oscillatorium, atque totum corpus, vocatur in mechanicis centrum oscillationis, eritque ergo distantia centri oscillationis ab axe $OH = \frac{kk}{OG} = \frac{Mkk}{M.OG}$; unde vulgaris regula inveniendi centri oscillationis obtinetur. Cognito autem vicissim centro oscillationis H, nostram quantitatem kk inde cognoscemus cum sit $kk = OG. OH$.

§. XLV. Quæ ante de momento cujusque potentiæ respectu, axis circa quem fit motus, sunt tradita, fient planiora, si perpendamus nullius vis, cujus momentum respectu hujus

 axis

axis ſit nullum, ullum effectum eſſe poſſe. Si enim directio vis in ipſum axem incidat, vel eidem ſit parallela, manifeſtum eſt motum corporis ab ea affici non poſſe; propterea quod hæc vis ſit normalis ad directionem motus, quem habet, axisque firmitas omni effectui hujus vis reluctetur. Deinde ſi directio vis per ipſum axem tranſeat, ea conſiderari poterit, quaſi eidem axis puncto, per quod tranſit, eſſet applicata, ideoque cum axis ſit immobilis, fruſtra ullum effectum exercere conabitur. Caſus iſti, quibus vim ſollicitantem nullus ſequitur effectus, huc redeunt, quando axis & directio vis ſollicitantis in eodem plano verſantur. Sin autem axis & directio vis non in eodem plano fuerit conſtitutæ, tum ſemper vis valebit motum rotatorium immutare. Ad cujus momentum inveſtigandum, per quodpiam directionis A E punctum A ducatur recta A C axi parallela, ad eamque in plano C A E normalis A D, atque vis A E ſecundum directiones A C & A D reſolvatur, quarum ſola poſterior huc ſpectat, per quam ad axem planum normale ducatur, & ex axis puncto, ubi ſecatur, in eam perpendiculum demittatur, in quod vis AD ducta præbebit momentum quæſitum. Ad calculum autem expeditius abſolvendum hoc modo invenietur. Ad axem ducatur planum quodcunque normale, directionem vis propoſitæ A E ſecans in A; ſitque O punctum axis in hoc plano: A E ex alio directionis puncto E in hoc planum demittatur perpendiculum E D, junctaque A D, erit, poſita vi $AE = P$, vis in directione A D urgens $= P \cos EAD$, hujusque momentum

Tab. II. Fig. 13.

Fig. 14.

mentum respectu axis erit $= P. AO \cos EAD. \sin OAD$. Vel in plano OAD ad OA ducatur normalis AF eritque momentum quaesitum $= P. AO. \cos EAF$, unde si vel $AO = o$ vel angulus EAF rectus, momentum evanescit, hucque redeunt casus ante memorati.

§. XLVI. His expositis motus principiis motum corporis in tubo circa axem fixum mobili contemplemur. Ac primo quidem sit tubus non solum rectus, sed etiam productus per ipsum axem transeat, ad eumque sit normalis. Sit ergo O punctum axis, per quod tubus transit, & OE tubus, qui in plano tabulae concipiatur mobilis, siquidem axis ad hoc planum in O normaliter insistat. Ponatur massa hujus tubi $= M$, ejusque momentum inertiae respectu axis $= Mkk$, tum vero sit massa corporis in tubo inclusi $= A$. Elapso jam tempore t pervenerit tubus in situm OE, corpusque in eo versetur in P, initio autem tenuerit tubus situm OC, ita ut nunc angulum $COE = \omega$ confecerit. Vocetur longitudo $OC = OE = f$, intervallum $OP = x$, & arcus $CE = s$, erit $s = f\omega$. Jam celeritas puncti tubi E erit $= \frac{ds}{dt} = \frac{fd\omega}{dt}$, quam ante vocavimus $= V u$, unde altitudo huic celeritati debita erit $u = \frac{ffd\omega^2}{dt^2}$ & $du = \frac{2ffd\omega dd\omega}{dt^2}$ posito dt constante. Momentum ergo virium ad hanc accelerationem requisitum est $\frac{Mkkdu}{ffd\omega} = \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$. Quoniam celeritas puncti E est $= \frac{ds}{dt}$, Tab. II. Fig. 15.

erit

erit celeritas puncti tubi $P = \frac{x\,ds}{f\,dt} = \frac{x\,d\omega}{dt}$, quam corpus in P cum tubo habet communem, secundum directionem PL ad tubum normalem, altitudo ergo huic celeritati debita erit $= \frac{xx\,d\omega^2}{dt^2}$. Celeritas vero corporis secundum directionem tubi est $= \frac{dx}{dt}$. Quoniam vero hæ celeritates non secundum constantes directiones diriguntur, sed ipsæ directiones continuo cum situ tubi mutantur; accelerationes modo hactenus adhibito definiri nequeunt. Reduci ergo prius motus corporis in P debet ad directiones constantes, quam vires ad accelerationem requisitæ definiri queant.

§. XLVII. Sumta ergo OC pro hac directione constante, in eam ex P ducatur perpendicularis PQ, & vocetur $OQ = p$, & $QP = q$. Jam motus corporis P verus secundum has directiones Pr & Pq resolutus dabit pro directione Pr celeritatem $= \frac{dp}{dt}$ & pro directione Pq celeritatem $= \frac{dq}{dt}$. Cum igitur massa corporis sit $= A$, necesse est ut corpus secundum directionem Pr sollicitetur vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$ & secundum directionem Pq vi $= \frac{2A\,ddq}{dt^2}$. Hæ vires nunc iterum ad directiones ante consideratas PE & PL, etiamsi non sint constantes revocari possunt, scilicet ob ang: $EPr =$

LPq

$LPq = EOC = \omega$, ex vi $Pr = \frac{2Addp}{dt^2}$ nascitur vis in directione $Pl = \frac{2Addp \sin\omega}{dt^2}$ & in directione PE vis $= \frac{2Addp \cos\omega}{dt^2}$. At ex vi $Pq = \frac{2Addq}{dt^2}$ oritur vis in directione $PL = \frac{2Addq \cos\omega}{dt^2}$, & in directione PE vis $= \frac{2Addq \sin\omega}{dt^2}$. Ob utramque ergo conjunctim corpus in directione PE sollicitabitur vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega + ddq \sin\omega)$ & in directione PL vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddq \cos\omega - ddp \sin\omega)$. Cum autem sit OP $= x$, & ang $COE = \omega$, erit $p = x \cos\omega$ & $q = x \sin\omega$, unde fit $dp = dx \cos\omega - x\,d\omega \sin\omega$; & $ddp = ddx \cos\omega - 2dxd\omega \sin\omega - xdd\omega \sin\omega - xd\omega^2 \cos\omega$; $dq = dx \sin\omega + xd\omega \cos\omega$; & $ddq = ddx \sin\omega + 2dxd\omega \cos\omega + xdd\omega \cos\omega - xd\omega^2 \sin\omega$. Hinc porro sequitur fore

$$ddp \cos\omega + ddq \sin\omega = ddx - xd\omega^2$$
$$ddq \cos\omega - ddp \sin\omega = 2dxd\omega + xdd\omega.$$

Quamobrem corpus in P ab his duabus viribus sollicitetur necesse est, secundum directionem PE vi $= \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2}$ & secundum directionem PL vi $= \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2}$. Sicque habemus vires, quæ ad motum, quem adesse fingimus, conservandum requiruntur, quæ si viribus actu solliciti-

tantibus æquales ponantur, prodibit motus verus tam tubi quam corporis in tubo.

§. XLVIII. Ponamus primo neque tubum neque corpus in tubo ab ulla vi externa ſollicitari, qui caſus locum habet, ſi axis rotationis fuerit verticalis tubusque in plano horizontali in gyrum agatur. Poſtquam enim tam tubo quam corpori ipſi incluſo motus quicunque fuerit ſemel impreſſus, motum ſecuturum calculus indicabit. Quoniam enim nulla vis externa adeſt, omnis motus mutatio a ſola preſſione corporis in tubum proficiſcetur; ſit igitur preſſio, qua corpus tubum ſecundum directionem ad eam normalem P L urget $= P$, ita ut viciſſim corpus a tubo in directione oppoſita Pl æquali vi P repellatur, quia nulla adeſt vis in directione PE ex motu corporis ſequentes naſcentur æquationes:

$$\text{I.}\ \frac{2A\,ddx - 2A\,x\,d\omega^2}{dt^2} = 0 \text{ ſeu } ddx = x\,d\omega^2$$

$$\&\ \text{II.}\ \frac{4A\,dx\,d\omega + 2A\,x\,dd\omega}{dt^2} = -P.$$

Deinde vis $PL = P$, qua tubus ſollicitatur, momentum reſpectu axis O eſt $= Px$, unde oritur hæc æquatio

$$\text{III.}\ \frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2} = Px, \text{ ſeu } \frac{2\,dd\omega}{dt^2} = \frac{Px}{Mkk}.$$

qui valor in æquatione ſecunda ſubſtitutus dabit:

$$\frac{4A\,dx\,d\omega}{dt^2} + \frac{APxx}{Mkk} = -P, \text{ ideoque } P = \frac{-4AMkk\,dx\,d\omega}{(Mkk + Axx)\,dt^2},$$

unde preſſio P innoteſcit. Eliminando autem P, ex æqua-

tionibus

tionibus II & tertia reſultat hæc:

IV. $4Axdxd\omega + 2Axxdd\omega + 2Mkkdd\omega = o$
cujus integrale eſt $Axxd\omega + Mkkd\omega = \text{Conſt.} = Eadt\sqrt{a}$
unde fit $d\omega = \frac{Eadt\sqrt{a}}{Axx + Mkk}$, qui valor in prima ſubſtitutus dat $ddx = \frac{E^2 a^3 x dt^2}{(Axx + Mkk)^2}$. Multiplicetur hæc æquatio per $2dx$ eritque integrale $dx^2 = \frac{E^2 a^3 dt^2}{A(Axx + Mkk)} + bdt^2$, unde oritur $dt = \frac{dx\sqrt{A(Axx + Mkk)}}{\sqrt{(bA(Mkk + Axx) - E^2 a^3)}}$, hincque porro $d\omega = \frac{Eaadx\sqrt{A}}{\sqrt{(Mkk + Axx)}(Ab(Mkk + Axx) - E^2 a^3)}$

§. XLIX. Quanquam hoc modo uterque motus facillime definitur, tamen, quia iſta æquationum reſolutio non commode ad caſum plurium corporum tubo incluſorum accommodatur, alio modo variabilis x ex calculo excludi poteſt, quo feliciſſime uſus eſt Celeberrimus Clairaut, qui ad hoc negotium adhibuit principium conſervationis virium vivarum. In hunc finem multiplicetur æquatio IV per $d\omega$

$$4Axdxd\omega^2 + 2Axxd\omega dd\omega + 2Mkkd\omega dd\omega = o.$$

Deinde æquatio prima $ddx - xd\omega^2 = o$ multiplicetur per $2Adx$ ut prodeat $2Adxddx - 2Axdxd\omega^2 = o$. Tum hæc ad illam addatur, & proveniet:

$2Adxddx + 2Axdxd\omega^2 + 2Axxd\omega dd\omega + 2Mkkd\omega dd\omega = o$ quæ integrata dat:

$$Adx^2 + Axxd\omega^2 + Mkkd\omega^2 = Fbdt^2.$$

hæcque complectitur principium conservationis virium vivarum, nam A $\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{xxd\omega^2}{dt^2}\right)$ dat vim vivam corporis A & $\frac{Mkkd\omega^2}{dt^2}$ vim vivam tubi, quarum summa est constans $=$ Fb. Cum jam ex prima æquatione sit $xd\omega^2=ddx$, erit $Axxd\omega^2=Axddx$, quo valore in illa æquatione substituto habebitur:

$$A(dx^2+xddx)+Mkkd\omega^2=Fbdt^2.$$

At est $dx^2+xddx=d.\,xdx=\frac{1}{2}dd.\,xx$, unde erit:

$$\tfrac{1}{2}dd.\,Axx+Mkkd\omega^2=Fbdt^2.$$

Æquationis autem quartæ integrale dat $Axx=\frac{Eadt\sqrt{a}}{d\omega}$ $-Mkk$. Sit $d\omega=\frac{dt\sqrt{a}}{v}$, erit $Axx=Eav$, & $\frac{1}{2}dd.\,Axx=$ $\frac{1}{2}Eaddv$, unde obtinebitur ista æquatio $\frac{1}{2}Eaddv+\frac{Mkkadt^2}{vv}$ $=Fbdt^2$, quæ ob dt constans per dv multiplicata & integrata dat:

$$\tfrac{1}{4}Eadv^2-\frac{Mkkadt^2}{v}=Fbvdt^2+Gc^2dt^2;$$ ideoque $dt=$

$$\frac{dv\sqrt{Eav}}{2\sqrt{(Mkka+Fbvv+Gccv)}};\quad d\omega=\frac{adv\sqrt{E}}{2\sqrt{v(Mkka+Fbvv+Gccv)}}$$

& $x=\sqrt{\frac{Eav}{A}}$ unde motus pariter cognoscitur.

§. L. Sit nunc axis tubi O horizontalis, circa quem tubus cum corpore in plano verticali descendat. Sit recta OC horizontalis atque elapso tempore t tubus pervenerit in

situm

situm OE angulo jam descripto $COE = \omega$; corpus autem nunc versetur in P. Manentibus omnibus denominationibus hactenus adhibitis, scilicet massa tubi $= M$, ejus momento inertiæ $= Mkk$, & intervallo $OP = x$, ad pressionem P nunc accedet gravitas tam tubi $= M$ quam corporis $= A$. Cum igitur corpus in directione verticali Pp urgeatur vi $= A$, ob angulum $pPL = \omega$, hinc orietur vis in directione $PE = A \sin \omega$ & in directione $PL = A \cos \omega$. Deinde si tubi centrum gravitatis statuatur in G, & intervallum $OG = g$, quia tubus in directione verticali Gg sollicitatur vi $= M$, hujus vis momentum erit $= Mg \cos \omega$ quod ad motum accelerandum impenditur. Ex his ergo viribus sequentes obtinebimus æquationes:

$$\text{I.} \quad \frac{2A\,ddx - 2Ax\,d\omega^2}{dt^2} = A \sin \omega$$

$$\text{II.} \quad \frac{4A\,dx\,d\omega + 2Ax\,dd\omega}{dt^2} = A \cos \omega - P$$

$$\text{III.} \quad \frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2} = Mg \cos \omega + Px.$$

Quodsi ex II & III pressio P eliminetur, habebitur:

$$\text{IV.} \quad \frac{4Ax\,dx\,d\omega + 2(Axx + Mkk)\,dd\omega}{dt^2} = Ax \cos \omega + Mg \cos \omega.$$

Multiplicetur hæc æquatio per $d\omega$, prima vero per dx invicemque addantur; & orietur hæc æquatio:

$$\frac{2A\,dx\,ddx + 2Ax\,dx\,d\omega^2 + 2Axx\,d\omega\,dd\omega + 2Mkk\,d\omega\,dd\omega}{dt^2} =$$

$A dx$ ſin $\omega + A x d\omega$ coſ ω + M $g\, d\omega$ coſ ω.

Cujus integrale eſt:

$$\frac{A dx^2 + A x^2 d\omega^2 + M k^2 d\omega^2}{dt^2} = A x \text{ ſin}\,\omega + M g \text{ ſin}\,\omega + E a$$

quam eandem principium conſervationis virium vivarum præbet.

§. LI. Quanquam hæ æquationes non difficilius inveniuntur quam præcedentes, tamen modus ante adhibitus, quo ad motus determinationem pervenimus, hic non ſuccedit, neque etiam patet an ullo alio modo æquatio, quæ non niſi duas variabiles contineat, inde derivari poſſit. Ad hoc certe inſigne analyſeos artificium requiretur, quoniam caſus alias facillimus ſine ſatis prolixo calculo inde expediri nequit. Caſus hic eſt, ſi tubus tam inertia quam pondere carere ſumatur, tum enim, quia corpus in motu ſuo nullum obſtaculum offendit, æque movebitur, ac ſi eſſet prorſus liberum, ideoque parabolam deſcribet, quod quidem noſtræ quoque æquationes, ſi recte tractentur, ſequenti modo facillime indicant. Sit enim M $= o$, atque æquationes præcedentes tranſibunt in has:

I. $2 ddx - 2 x d\omega^2 = dt^2$ ſin ω, & ob P $= o$.

II. $4 dx d\omega + 2 x dd\omega = dt^2$ coſ ω,

& ultima dat: $dx^2 + x x d\omega^2 = x dt^2$ ſin $\omega + a dt^2$.

Si jam ex prima & ſecunda eliminetur dt^2 proveniet:

ddx coſ $\omega - x d\omega^2$ coſ $\omega - 2 dx d\omega$ ſin $\omega - x dd\omega$ ſin $\omega = o$,

cujus integrale eſt:

dx coſ ω

$dx \cos\omega - x\,d\omega \sin\omega = dt\sqrt{b}$, quæ denuo integrata dat $x \cos\omega = t\sqrt{b} + c$. Nunc multiplicetur prima per fin ω & fecunda per cof ω, atque ambæ æquationes addantur; prodibitque:

$$ddx \sin\omega = x\,d\omega^2 \sin\omega + 2\,dx\,d\omega \cos\omega + x\,dd\omega \cos\omega = \tfrac{1}{2}dt^2$$

cujus integrale eft:

$$dx \sin\omega + x\,d\omega \cos\omega = \tfrac{1}{2}t\,dt + dt\sqrt{f}:$$

quæ denuo integrata dat:

$$x \sin\omega = \tfrac{1}{4}tt + t\sqrt{f} + g.$$

At eft $x \cos\omega = OQ = p$; & $x \sin\omega = PQ = q$, unde cum fit $p = t\sqrt{b} + c$ & $q = \frac{1}{4}tt + t\sqrt{f} + g$, fi eliminetur t æquatio inter coordinatas orthogonales reperietur pro parabola, uti rei natura poftulat. Hunc cafum per fe cognitum præcipue ad methodum confirmandam, hic evolvere vifum eft.

§. LII. Sint nunc in tubo recto, qui adhuc per axem tranfeat, ad eumque fit normalis plura corpora inclufa, quæ in eo fint mobilia. Habuerit initio tubus fitum OE, in quo tria corpora inclufa fuerint in punctis A, B, C quorum maffæ iisdem litteris A, B, C exponantur, maffa vero tubi fit $= M$, ejusque momentum inertiæ refpectu axis O ponatur $= Mkk$. Poftquam igitur tam tubo quam corporibus A, B, C motus quicunque fuerit impreffus elapfo tempore t perveneri tubus in fitum OS, & corpora in P, Q, R. Ponatur angulus $COS = \omega$, & diftantiæ $OP = x$, $OQ = y$, & $OR = z$. Pofito jam elemento temporis dt conftante, eodem ratioci- *Tab. II. Fig. 17.*

nio,

nio, quo §. 46. ſumus uſi, patebit ad accelerationem tubi requiri momentum virium $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$. Ad accelerationes autem ſingulorum corporum inveniendas ratiocinium §. 47. adhibitum totum negotium conficiet; ex quo apparebit corpus in P ſollicitari debere ſecundum directionem tubi PS vi $= \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2}$, at ſecundum directionem ad tubum normalem PL vi $= \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2}$. Simili modo corpus in Q ſollicitabitur ſecundum directionem QS vi $= \frac{2Bddy - 2Byd\omega^2}{dt^2}$, & ſecundum directionem QM vi $= \frac{4Bdyd\omega + 2Bydd\omega}{dt^2}$. Atque tertium corpus in R ſecundum directionem RS ſollicitari debebit vi $= \frac{2Cddz - 2Czd\omega^2}{dt^2}$ & ſecundum directionem RN vi $= \frac{4Cdzd\omega + 2Czdd\omega}{dt^2}$. His autem inventis viribus problema quaſi ſolutum eſt exiſtimandum, cum quæcunque vires tam tubum quam corpora in eo urgeant, eæ his viribus æquivalentes ſint ſtatuendæ; quo facto æquationes reſultantes determinabunt relationes inter variabiles ω, x, y, z & t, quibus univerſus motus definietur.

§. LIII. Cum viribus autem externis, quibus forte tubus cum corporibus incluſis ſollicitetur, conjungendæ ſunt preſſio-

pressiones, quas singula corpora in tubum exerunt. Sit igitur pressio corporis P in tubum secundum directionem ad tubum normalem $PL = P$, pressio corporis Q secundum directionem $QM = Q$, & pressio corporis R secundum directionem $RN = R$. Harum igitur virium, cum ad motum tubi accelerandum tendant, momentum erit $= Px + Qy + Rz$. Deinde quia reactio actioni est æqualis, ipsa corpora P, Q, R, secundum directiones oppositas Pl, Qm, Rn urgebuntur viribus P, Q, & R. Quare si nullæ vires externæ præterea adsint, quod evenit si axis fuerit verticalis, tubusque in plano horizontali gyretur, quo casu gravitatis effectus tollitur, prodibunt sequentes æquationes:

$$\text{I. } \frac{2Addx - 2Axd\omega^2}{dt^2} = o; \quad \text{II. } \frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega}{dt^2} = -P$$

$$\text{III. } \frac{2Bddy - 2Byd\omega^2}{dt^2} = o; \quad \text{IV. } \frac{4Bdyd\omega + 2Bydd\omega}{dt^2} = -Q$$

$$\text{V. } \frac{2Cddz - 2Czd\omega^2}{dt^2} = o; \quad \text{VI. } \frac{4Cdzd\omega + 2Czdd\omega}{dt^2} = -R$$

$$\text{\& VII. } \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = Px + Qy + Rz.$$

Hinc ex æquationibus II, IV, VI & VII. pressiones P & Q & R facile excluduntur, prodibit enim hæc æquatio:

VIII. $2Axdxd\omega + 2Bydyd\omega + 2Czdzd\omega + (Mk^2 + Axx + Byy + Czz)dd\omega = o$, cujus integrale est:

IX. $(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)d\omega = Ea\,dt\sqrt{a}$,

quæ cum æquationibus I, III, & V conjuncta determinatio-

 nem

nem motus continet. Hæc ultima æquatio complectitur principium quodpiam, quod conservationem motus gyratorii appellare soleo, est enim $\frac{xd\omega}{dt}$ celeritas corporis in P gyratoria, & $\frac{Axd\omega}{dt}$ ejusdem motus gyratorius: unde expressio $\frac{Axxd\omega}{dt}$ commode appellatur momentum motus gyratorii: Quare hæc æquatio indicat perpetuo eandem momentorum motus gyratorii summam conservari.

§. LIV. Multiplicetur æquatio VIII. per $2d\omega$, & prima per $dxdt^2$, III per $dydt^2$, atque subscribantur: $Ad\omega^2(Axdx + Bydy + Czdz) + d\omega dd\omega(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2) = 0$

$$2Adxddx - 2Axdxd\omega^2 = 0$$
$$2Bdyddy - 2Bydyd\omega^2 = 0$$
$$2Cdzddz - 2Czdzd\omega^2 = 0$$

Quod si jam hæ æquationes invicem addantur, erit summa:

$$\left.\begin{array}{l} 2Adxddx + 2Bdyddy + 2Cdzddk \\ + 2Axdxd\omega^2 + 2Bydyd\omega^2 + 2Czdzd\omega^2 \\ + 2Axxd\omega dd\omega + 2By^2d\omega dd\omega + 2Czzd\omega dd\omega + 2Mk^2d\omega dd\omega \end{array}\right\} = 0$$

cujus æquationis integrale est:

$$\text{X.}\quad \begin{array}{l} + Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ + Ax^2d\omega^2 + By^2d\omega^2 + Cz^2d\omega^2 + Mk^2d\omega^2 = Fbdt^2 \end{array}$$

quæ æquatio continet principium conservationis virium vivarum. Est enim $\frac{dx}{dt}$ celeritas corporis A secundum directionem

ctionem PS & $\frac{xd\omega}{dt}$ celeritas corporis ejusdem secundum directionem PL ad PS normalem, unde ejus vera celeritas erit $= \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{xxd\omega^2}{dt^2}\right)}$, ideoque altitudo huic celeritati debita $= \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{xx\,d\omega^2}{dt^2}$, & vis viva istius corporis $= \frac{Adx^2}{dt^2} + \frac{Axxd\omega^2}{dt^2}$. Simili modo vis viva corporis B erit $= \frac{Bdy^2}{dt^2} + \frac{Byy\,d\omega^2}{dt^2}$, & corporis C $= \frac{Cdz^2}{dt^2} + \frac{Czzd\omega^2}{dt^2}$. Porro cum cujusvis tubi particulæ ab axe O intervallo $= r$ remotæ celeritas sit $= \frac{rd\omega}{dt}$, ejusdem particulæ, cujus massa sit $= dM$ vis viva erit $= rrdM.\frac{d\omega^2}{dt^2}$; unde totius tubi vis viva $= \frac{d\omega^2}{dt^2}\int rrdM$. At $\int rrdM$, quod complectitur omnes tubi particulas per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicatas, per Mkk expressimus, quamobrem vis viva tubi erit $= \frac{Mkkd\omega^2}{dt^2}$.

§. LV. Istæ autem duæ æquationes differentiales primi gradus, quas elicuimus parum adhuc conferunt ad motum cognoscendum, quoniam plures variabiles continent. Quo igitur æquationem, in qua duæ tantum insint variabiles, obtineamus, methodum primo Celeb. Clairaut secuti resumamus æquationem X:

$$\left.\begin{array}{l} A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 \\ + A x^2\,d\omega^2 + B y^2\,d\omega^2 + C z^2\,d\omega^2 + M k^2\,d\omega^2 \end{array}\right\} = F\,b\,dt^2$$

Cum jam ex prima æquatione fit $A x\,d\omega^2 = A\,ddx$, erit $A x^2 d\omega^2 = A x\,ddx$; ſimilique modo ex æquationibus III & V erit $B y^2\,d\omega^2 = B y\,ddy$ & $C z^2\,d\omega^2 = C z\,ddz$, qui valores ſi in æquatione X ſubſtituantur, proveniet:

$$\left.\begin{array}{l} A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2 \\ A x\,ddx + B y\,ddy + C z\,ddz \end{array}\right\} = F\,b\,dt^2 - M k^2\,d\omega^2$$

At eſt $A(dx^2 + x\,ddx) + B(dy^2 + y\,ddy) + C(dz^2 + z\,ddz)$ $= d\,(A x\,dx + B y\,dy + C z\,dz) = \frac{1}{2}\,dd\,(A x^2 + B y^2 + C z^2)$ ideoque $\frac{1}{2}\,dd.\,(A x^2 + B y^2 + C z^2) = F\,b\,dt^2 - M k^2\,d\omega^2$. Æquatio vero IX dat:

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = \frac{E\,a\,dt\,\surd a}{d\omega} - M k k.$$

Ponatur brevitatis gratia $d\omega = \frac{dt\,\surd a}{v}$ eritque, $dd.\,(A x^2 + B y^2 + C z^2) = E\,a\,ddv$; unde fiet $\frac{1}{2}\,E\,a\,ddv = F\,b\,dt^2 - \frac{M k k a\,dt^2}{v^2}$. Multiplicetur per dv & ob dt conſtans integretur, erit:

$$\tfrac{1}{4}\,E\,a\,dv^2 = F\,b\,v\,dt^2 + \frac{M k k a\,dt^2}{v} + G\,c\,c\,dt^2$$

ideoque $dt = \frac{dv\,\surd E\,a\,v}{2\surd(M k k a + G c c v + F b v v)}$; atque

$$d\omega = \frac{a\,dv\,\surd E}{2\surd v(M k k a + G c c v + F b v v)}.$$

Ad quodvis ergo tempus hinc ſitus & celeritas tubi definiri poteſt.

§. LVI.

§. LVI Hinc autem nondum ſitus & motus corporum ad quodvis tempus conſtat. Ad hoc in ſubſidium vocari debent æquationes I, III, & V, quæ valores ipſarum x, y & z, definient. Cum enim ex æquatione prima ſit $ddx = xd\omega^2$; ponatur $x = e^{\int u\,dt}$, erit $ddx = e^{\int u\,dt}(du + uu\,dt)\,dt$, quibus valoribus ſubſtitutis habebitur, $du + uu\,dt = \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{a\,dt}{v^2}$, ubi ſi loco dt valor modo inventus ſubſtituatur fiet

$$du = \left(\frac{a}{vv} - uu\right) \cdot \frac{dv\sqrt{Eav}}{2\sqrt{(Mkka + Gccv + Fbvv)}}$$

A reſolutione ergo hujus æquationis pendet determinatio tam loci quam celeritatis corporis A in P; Similes vero æquationes pro definiendis y & z reperientur, earumque ergo valores tantum ratione conſtantium, quæ per integrationem iſtius æquationis ingrediuntur, different. Manifeſtum autem eſt hanc æquationem eſſe caſum æquationis quondam a Comite Riccato propoſitæ, quæ in hac forma continetur, $dy + yy\,dx = X\,dx$ denotante X functionem quamcunque ipſius x. Etſi autem hæc æquatio pluribus caſibus ſeparationem variabilium atque adeo integrationem admittit, tamen difficulter hæc æquatio dijudicatur, utrum ad ejusmodi caſum reduci queat nec ne? Interim tamen obſervavi hanc æquationem $dy + yy\,dx = X\,dx$ generatim ope motus tractorii conſtrui poſſe, unde etiam per motum tractorium loca corporum A, B, C ad quodvis tempus aſſignari poterunt. Ceterum quoniam iſta methodus hoc laborat incommodo, ut ad totidem

 hujus-

hujusmodi æquationes resolutu difficiles, quot sunt corpora tubo inclusa, perducat, alia methodo, qua antequam illa a Celeb. Clairaut mecum erat communicata, usus eram, resolutionem tentabo.

§. LVII. Considero nimirum primum æquationes I, III & V, quæ ad formam simplicissimam reductæ sunt,

$ddx = xd\omega^2$; $ddy = yd\omega^2$; $ddz = zd\omega^2$,

quæ cum inter se sint perfecte similes, manifestum est, si una earum esset resoluta, reliquas omnes quotquot fuerint simul resolutionem esse nactas. Assumo igitur æquationem similem $dds = sd\omega^2$, ex qua pono valorem ipsius s jam esse cognitum: nunc pono $x = Vs$, erit $ddx = Vdds + 2dVds + sddV = Vsd\omega^2$. At æquatio $dds = sd\omega^2$ per V multiplicata dat $Vdds = Vsd\omega^2$, quæ a priori subtracta relinquit $2dVds + sddV = o$, cujus per s multiplicatæ integrale est $ssdV = Kdt$ & $V = L + K\int\frac{dt}{ss}$, unde fit $x = Ls + Ks\int\frac{dt}{ss}$. Simili modo quantitates y & z per s exprimentur, eorumque valores tantum ratione constantium discrepabunt. Erit ergo:

$$x = is + \lambda s\int\frac{dt}{ss}$$

$$y = ms + \mu s\int\frac{dt}{ss}$$

$$z = ns + \nu s\int\frac{dt}{ss}.$$

ubi

ubi constantes tam ex situ corporum initiali, quam ex eorum celeritatibus primum impressis definiri debent. Ponamus enim initio fuisse $OA = a$; $OB = b$; & $OC = c$; itemque horum corporum celeritates fuisse secundum directionem tubi OC, primi $A = \alpha$; secundi $B = \beta$, & tertii $C = \gamma$: tum si integrale $\int \frac{dt}{ss}$ ita capiatur, ut evanescat posito $t = o$, atque casu $t = o$ fiat $s = 1$ & $\frac{ds}{dt} = o$, erit $a = i$, $b = m$; $c = n$; & $\alpha = \lambda$, $\beta = \mu$, & $\gamma = \nu$, ideoque hinc constantibus definitis erit

$$x = as + \alpha s \int \frac{dt}{ss}$$

$$y = bs + \beta s \int \frac{dt}{ss}$$

$$z = cs + \gamma s \int \frac{dt}{ss}.$$

Ex æquatione ergo $dds = s d\omega^2$ per duplicem integrationem s ita debet definiri, ut posito $t = o$ & $\omega = o$ fiat $s = 1$ & $\frac{ds}{dt} = o$.

§. LVIII. Ponamus signorum integralium exterminandorum gratia $\int \frac{dt}{ss} = u$, fietque $dt = ss du$; &

$$x = as + \alpha s u$$
$$y = bs + \beta s u$$
$$z = cs + \gamma s u$$

& cum in æquatione $dds = s d\omega^2$ differentiale dt sit sumtum constans, erit hanc hypothesin exuendo:

d. ds

$d.\frac{ds}{dt} = \frac{sd\omega^2}{dt}$ seu $d.\frac{ds}{ssdu} = \frac{d\omega^2}{sdu}$; & posito $s = \frac{1}{r}$, ut sit $dt = \frac{du}{rr}$, &

$x = \frac{a + \alpha u}{r}$; $y = \frac{b + \beta u}{r}$; $z = \frac{c + \gamma u}{r}$, fiet

$d.\frac{dr}{du} + \frac{rd\omega^2}{du} = o$; quae aequatio posito elemento du constante transit in $ddr + rd\omega^2 = o$.

Cum jam sit ex aequatione IX, si loco constantis a ibi adhibitae scribatur f.

$$(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)\frac{d\omega}{dt} = Ef\sqrt{f}.$$

ita ut si initio motus celeritas tubi angularis $\frac{d\omega}{dt}$ ponatur $= \theta$, sit:

$$Ef\sqrt{f} = (Mk^2 + Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)\,\theta,$$

erit $(Mk^2 + Ax^2 + By^2 + Cz^2)\frac{rrd\omega}{du} = Ef\sqrt{f}$.

substituantur nunc pro x, y, z valores ante inventi, eritque

$$\frac{Ef\,du\sqrt{f}}{d\omega} - Mk^2r^2 = \begin{array}{l} + Aa^2 + 2Aa\alpha u + A\alpha^2u^2 \\ + Bb^2 + 2Bb\beta u + B\beta^2u^2 \\ + Cc^2 + 2Cc\gamma u + C\gamma^2u^2 \end{array}$$

Ponatur $Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = F$

$Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma = G$

$A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 = H$

ut sit $Ef\sqrt{f} = (F + Mkk)\,\theta$ eritque

$$\frac{(F + Mkk)\,\theta du}{d\omega} = Mk^2r^2 + F + 2Gu + Huu,$$

quae

quæ æquatio cum hac $ddr + rd\omega^2 = o$ conjuncta totam solutionem complectitur. Eliminato autem $d\omega$, totum negotium ad resolutionem sequentis æquationis perducitur

$$\frac{ddr}{r} + \frac{(F+Mkk)^2\,\theta^2\,du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2} = o.$$

§. LIX. Æquatio hæc differentialis secundi gradus nullo artificio adhuc usitato ad differentialem primi gradus reduci ideoque multo minus integrari posse videtur. Quodsi autem æquatio superior decima, quæ principium conservationis virium vivarum complectitur in subsidium vocetur, æquatio differentialis primi gradus, quæ illius sit integralis sponte resultat. Determinata autem constante Fb ibi adhibita secundum statum motus initialis hic assumti erit:

$$\left.\begin{matrix} Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2 \\ +(Ax^2+By^2+Cz^2)\,d\omega^2 + Mk^2\,d\omega^2 \end{matrix}\right\} = (H+F\theta\theta+Mk^2\theta^2)\,dt^2$$

Quæ ob $dt^2 = \frac{du^2}{r^4}$ &

$$dx = \frac{-adr}{rr} + \frac{\alpha du}{r} - \frac{\alpha udr}{rr}$$

$$dy = \frac{-bdr}{rr} + \frac{\beta du}{r} - \frac{\beta udr}{rr}$$

$$dz = \frac{-cdr}{rr} + \frac{\gamma du}{r} - \frac{\gamma udr}{rr}$$

transmutabitur in sequentem:

$$\frac{Fdr^2}{r^4} - \frac{2Gdudr}{r^3} + \frac{2Gudr^2}{r^4} + \frac{Hdu^2}{r^2} - \frac{2Hududr}{r^3} + \frac{Hu^2dr^2}{r^4}$$

$$+(F+2Gu+Huu)\frac{d\omega^2}{rr}+Mk^2d\omega^2=\frac{Hdu^2}{r^4}+\frac{(F+Mk^2)\theta^2du^2}{r^4}$$

Multiplicetur hæc æquatio per rr & cum ſit:

$$d\omega^2=\frac{(F+Mkk)^2\theta\theta du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2} \text{ erit}$$

$$\frac{(F+Mk^2)^2\theta^2du^2}{Mk^2r^2+F+2Gu+Hu^2}+\frac{dr^2}{r^2}(F+2Gu+Hu^2)-\frac{2dudr}{r}(G+Hu)$$

$$+Hdu^2=\frac{Hdu^2}{rr}+\frac{(F+Mk^2)\theta^2du^2}{rr},$$

quæ eſt propterea æquatio integralis illius, quam ante invenimus:

$$\frac{ddr}{r}+\frac{(F+Mkk)^2\theta^2du^2}{(Mk^2r^2+F+2Gu+Huu)^2}=0.$$

Si enim illa differentietur poſito du conſtante, & loco ddr valor ex hac æquatione ſubſtituatur, tum ipſa æquatio prior per $\frac{-2dr}{r}$ multiplicata reſultat.

§. LX. Ex hoc ergo caſu intelligitur, quanta adhuc incrementa in methodo integrali deſiderentur, cum nullum etiamnum artificium inventum ſit, quo iſta æquatio integralis elici potuiſſet: &, cum tractatio problematis mechanici ad hanc obſervationem perduxerit, perſpicuum eſt, hujusmodi ſpeculationes, etiamſi per ſe nullius uſus eſſent, tamen ipſi analyſi promovendæ & amplificandæ mirifice inſervire. Quanquam autem reſolutionem problematis ad duplicem æquationem differentialem primi gradus revocavimus, tamen neutra

neutra ita eſt comparata, ut ipſum motum inde definiri liceret, niſi amplitudo problematis reſtringatur. Quodſi enim inertia tubi evaneſcere ponatur, tum poſteriori modo ex æquatione differentiali ſecunda motus cognoſci poterit, dum ejus integralis æquatio, quam invenimus, nihil omnino prodeſt: prior autem methodus, etſi motum tubi facile oſtendit, tamen ad motum corporum determinandum non æque videtur apta, atque altera. Qui caſus, cum ad inſignia analyſis myſteria aditum parare queat, dignus videtur ut ejus ſolutionem hic fuſius exponamus. Quæritur igitur motus plurium corporum tubo recto, qui ad axem gyrationis ſit perpendicularis, incluſorum, dum nullæ potentiæ externæ urgent, atque ſimul ipſa tubi maſſa evaneſcit. Hoc tamen non obſtante tubus rigiditatem ſervare cenſendus eſt, qua efficitur, ut corpora perpetuo in linea recta contineantur. Hancque ob cauſam, etſi unicum corpus, ſi hujusmodi tubo eſt incluſum, nullam inde alterationem patitur, neque ullam preſſionem exerit, tamen pro pluribus corporibus longe alia eſt ratio, qua fit ut determinatio motus ſatis moleſtum calculum, variaque ſingularia artificia requirat, quæ pluribus aliis indagandis anſam præbere queant.

§. LXI. Sit igitur maſſa tubi $M = o$, atque æquatio differentio-differentialis abibit in hanc:

$$\frac{ddr}{r} + \frac{F^2 \theta^2 du^2}{(F + 2Gu + Hu^2)^2} = o.$$

 Pona-

Ponatur nunc $r = e^{\int v\,du}$, erit $\frac{ddr}{r} = dv\,du + vv\,du^2$; quo valore ſubſtituto emerget æquatio primi gradus:

$$dv + vv\,du + \frac{F^2\theta^2\,du}{(F + 2Gu + Hu^2)^2} = 0.$$

quæ ſi integrale algebraicum habeat, erit hujusmodi

$$v = \frac{\lambda + \mu u}{F + 2Gu + Huu}$$

unde fit $dv = \frac{\mu F\,du - \mu Huu\,du - 2\lambda G\,du - 2\lambda Hu\,du}{(F + 2Gu + Huu)^2}$

His valoribus ſubſtitutis erit:

$$\begin{array}{l} + \mu F - 2\lambda Hu - \mu Huu \\ - 2\lambda G + 2\lambda\mu u + \mu^2 uu = 0 \\ + \lambda\lambda \\ + F^2\theta^2. \end{array}$$

Duabus hic conditionibus ſatisfit ponendo $\mu = H$; tumque porro reperietur: $\lambda = G \pm \sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}$. At ex formulis ſupra datis patet eſſe $G^2 < FH$, ideoque hic ipſius λ valor erit imaginarius. Cum ergo ſit

$$v = \frac{\lambda + Hu}{F + 2Gu + Huu} \text{ erit}$$

$$\int v\,du = l\sqrt{(F + 2Gu + Huu)} \pm \int \frac{du\sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}}{F + 2Gu + Huu}$$

Porro autem habemus $d\omega = \frac{F\theta\,du}{F + 2Gu + Huu}$, unde fit

$$\int v\,du = l\sqrt{(F + 2Gu + Huu)} \pm \frac{\omega\sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)}}{F\theta}.$$

At

At integratio dat $\omega = \frac{F\theta}{\sqrt{(FH-GG)}} A\ tag. \frac{u\sqrt{(FH-GG)}}{F+Gu}$.

Hinc fit $\frac{u\sqrt{(FH-GG)}}{F+Gu} = tag. \frac{\omega\sqrt{(FH-GG)}}{F\theta}$, quæ æquatio, cum fit $FH > GG$ eft realis.

§. LXII. Cum igitur ex variabili ω commode definiatur variabilis u, loco ipfius u in calculum introducamus ω, quippe quæ ad motum quæfitum immediate refertur. Ponatur ergo brevitatis caufa $\frac{\sqrt{(FH-GG)}}{F\theta} = m$, ut fit $\sqrt{(FH-GG)} = mF\theta$, eritque

$$\frac{mF\theta u}{F+Gu} = tag.\ m\omega \ \&\ u = \frac{F\ tag.\ m\omega}{mF\theta - G\ tag.\ m\omega}$$

atque $\sqrt{(F+2Gu+Huu)} = \frac{mF\theta\ sec.\ m\omega.\ \sqrt{F}}{mF - G\ tag.\ m\omega}$

five $u = \frac{F\ fin\ m\omega}{mF\theta\ cof\ m\omega - G\ fin\ m\omega}$ &

$$\sqrt{(F+2Gu+Huu)} = \frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta\ cof\ m\omega - G\ fin\ m\omega}$$

Hinc ergo erit ob $\sqrt{(G^2 - FH - F^2\theta^2)} = F\theta\sqrt{(-m^2-1)}$

$$\int v\,du = l\frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta\ cof\ m\omega - G\ fin\ m\omega} + \omega\sqrt{(-m^2-1)}$$

$$\&\ r = e^{\pm\omega\sqrt{(-m^2-1)}}\frac{mF\theta\sqrt{F}}{mF\theta\ cof\ m\omega - G\ fin\ m\omega}.$$

Cum igitur duplicem habeamus valorem pro r, ex iis obtinebimus valorem completum æquationi differentio - differentiali fatisfacientem:

$$r = \frac{m F \theta \sqrt{F}}{mF\theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega}\left(\frac{(\mu+\nu\sqrt{-1})e^{\omega\sqrt{(-m^2-1)}}}{2} + \frac{(\mu-\nu\sqrt{-1})e^{-\omega\sqrt{(-m^2-1)}}}{2}\right)$$

ubi si exponentialia hæc imaginaria ad quadraturam circuli reducantur fiet:

$$r = \frac{m F \theta \sqrt{F}}{mF\theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega}\left(\mu \operatorname{cof} \omega\sqrt{(m^2+1)} - \nu \operatorname{fin} \omega \sqrt{(m^2+1)}\right)$$

& $s = \frac{m F \theta \operatorname{cof} m \omega - G \operatorname{fin} m \omega}{(\mu \operatorname{cof} \omega \sqrt{(m^2+1)} - \nu \operatorname{fin} \omega \sqrt{(m^2+1)})\, m F \theta \sqrt{F}}$, ubi cum posito $\omega = o$ debeat esse $s = r, = r$ fiet $\mu = \frac{1}{\sqrt{F}}$, & quia eodem casu esse oportet $ds = o$, erit $\nu = \frac{G}{F\theta\sqrt{F(m^2+1)}}$; ideoque

$$s = \frac{(mF\theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega)\sqrt{(mm+1)}}{mF\theta\sqrt{(m^2+1)}.\ \operatorname{cof}\omega\sqrt{(mm+1)} - m G \operatorname{fin}\omega\sqrt{(mm+1)}}.$$

§. LXIII. Ponamus brevitatis gratia $\sqrt{(mm+1)} = n$ eritque

$$s = \frac{n(m F \theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega)}{m(n F \theta \operatorname{cof} n\omega - G \operatorname{fin} n\omega)}.$$

Jam ob $u = \frac{F \operatorname{fin} m\omega}{m F \theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega}$ erit

$$a + \alpha u = \frac{mF\theta a \operatorname{cof} m\omega + (F\alpha - Ga) \operatorname{fin} m\omega}{m F \theta \operatorname{cof} m\omega - G \operatorname{fin} m\omega}.$$

Quare cum sit $x = as + \alpha s u = s(a + \alpha u)$ habebitur

$$x = \frac{n(mF\theta a \operatorname{cof} m\omega + (F\alpha - Ga)\operatorname{fin} m\omega)}{m(F\theta \operatorname{cof} n\omega - G \operatorname{fin} n\omega)}$$ similiterque

$$y = \frac{n(mF\theta b \operatorname{cof} m\omega + (F\beta - Gb)\operatorname{fin} m\omega)}{m(nF\theta \operatorname{cof} n\omega - G \operatorname{fin} n\omega)}$$

$z =$

$$z = \frac{n\,(m F \theta c \operatorname{cos} m\omega + (F\gamma - Gc) \operatorname{sin} m\omega)}{m\,(n F \theta \operatorname{cos} n\omega - G \operatorname{sin} n\omega)}$$

Denique cum ſit $du = \frac{m^2 F^2 \theta\, d\omega}{(m F \theta \operatorname{cos} m\omega - G \operatorname{sin} m\omega)^2}$ ob

$dt = ss\,du$ erit

$$dt = \frac{nn F^2 \theta\, d\omega}{(n F \theta \operatorname{cos} n\omega - G \operatorname{sin} n\omega^2)}$$ & integrando

$$t = \frac{F \operatorname{sin} n\omega}{n F \theta \operatorname{cos} n\omega - G \operatorname{sin} n\omega}.$$

Cognito ergo motu initiali dum tubus ſitum tenet AE, exiſtentibus OA $= a$, OB $= b$, OC $= c$, & celeritatibus corporum ſecundum tubi longitudinem α, β, γ, itemque celeritate tubi angulari $= \theta$, dum ipſa tubi maſſa evaneſcens aſſumitur; denotant:

$$F = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 \qquad m = \frac{\sqrt{(FH - GG)}}{F\theta}$$

$$G = Aa\alpha + Bb\beta + Cc\gamma$$
$$H = A\alpha\alpha + B\beta\beta + C\gamma\gamma \quad \& \quad n = \sqrt{(mm+1)}$$

Hincque ergo ad quodvis tempus t tam ſitus tubi ſeu angulus EOS $= \omega$, & diſtantiæ corporum ab axe AP $= x$, AQ $= y$, AR $= z$ definiri poterunt. Hoc itaque modo iſte caſus alias difficillimus per ſolos ſinus & coſinus duorum angulorum $m\omega$ & $n\omega$ reſolvitur.

§. LXIV. Quodſi autem inertia tubi non evaneſcat, caſus quoque datur, quo ex ſuperioribus æquationibus motum definire licet. Hic caſus eſt, ſi corpora A, B, C initio vel nullum habuerint motum ſecundum tubi longitudinem, vel ſi eorum

eorum celeritates α, β, γ ipsis distantiis a, b, c sint proportionales; tum enim uti ex §. 58. patet distantiæ x, y & z eandem perpetuo proportionem tenebunt, eritque $y = \frac{b}{a} x$ & $z = \frac{c}{a} x$; atque ob $\beta = \frac{b}{a} \alpha$ & $\gamma = \frac{c}{a} \alpha$, habebitur:

$F = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$; $G = \frac{\alpha}{a}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)$ & $H = \frac{\alpha^2}{a^2}(Aa^2 + Bb^2 + Cc^2)$. Hincque æquatio IX transibit in hanc:

$$\frac{(F + Mkk)\,\theta\, dt}{d\omega} = Mk^2 + \frac{Fx^2}{a^2}.$$

æquatio vero decima abibit in hanc:

$$(H + F\theta\theta + Mk^2\theta^2)\, dt^2 = \frac{F dx^2}{a^2} + \frac{Fx^2 d\omega^2}{a^2} + Mk^2 d\omega^2 = \left(\frac{F\alpha^2}{a^2} + F\theta^2 + Mk^2\theta^2\right) dt^2 \text{ ob } H = \frac{F\alpha^2}{a^2}.$$

Ex priore autem est $d\omega^2 = \frac{a^4 (F + Mkk)^2 \theta^2 dt^2}{(Fx^2 + Mk^2 a^2)^2}$, quo valore in posteriori substituto erit:

$$(F\alpha^2 + Fa^2\theta^2 + Mk^2 a^2 \theta^2)\, dt^2 = F dx^2 + \frac{a^4 (F + Mk^2)^2 \theta^2 dt^2}{Fx^2 + Mk^2 a^2}$$

ex qua obtinetur:

$$dt = \frac{dx \sqrt{F (Fx^2 + Mk^2 a^2)}}{\sqrt{(F^2 \alpha^2 x^2 + F^2 a^2 \theta^2 x^2 + FMk^2 a^2 \theta^2 x^2 + FMk^2 a^2 \alpha^2 - F^2 a^4 \theta^2 - FMk^2 a^4 \theta^2)}},$$ seu

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 + a^2\theta^2 (xx - aa)(F - Mk^2) : (Fxx + Mk^2 a^2))}}$$

Sic igitur relatio inter t & x innotescit, qua inventa ad datum

datum tempus t ſimul diſtantiæ y & z cognoſcuntur. Denique ſitus tubi reperietur ex hac æquatione

$$d\omega = \frac{aa(F+Mkk)\theta\, dt}{Fxx+Mk^2a^2}.$$

§. LXV. Sit jam circa axem ad planum tabulæ in O normalem tubus rectus DS mobilis, qui in plano ad axem normali ſit ſitus, in eoque incluſum ſit corpus P, cujus maſſa $=$ A, maſſa vero tubi ſit $=$ M, ejusque momentum inertiæ ad axem O relatum $= Mkk$. Quoniam tubus non per axem tranſit, in eum ex O ducatur perpendicularis OD, voceturque OD $= a$. Initio autem tubus tenuerit ſitum rectæ OE parallelum; nunc autem elapſo tempore t habeat ſitum DS, ita ut, ducta DR ipſi OE parallela jam angulum RDS motu angulari deſcripſerit. Sit iſte angulus RDS $= \omega$; & hoc tempore corpus verſetur in P, unde ad OE demittatur perpendiculum PQ, vocenturque OQ $= p$, PQ $= q$, ita ut p & q ſint coordinatæ ad lineam, quam corpus P motu ſuo vero deſcribit; atque producta QP in q, ductaque Pp rectæ OE parallela ad motum corporis conſervandum neceſſe erit, ut id ſollicitetur ſecundum directionem Pp vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$, & ſecundum directionem Pq vi $= \frac{2A\,ddy}{dt^2}$ ſumto dt conſtante. Vocetur jam variabilis DP $= x$, & ducta OP ſit OP $= \sqrt{(aa+xx)} = z$, erit ob PDR $= \omega$, PR $= x \sin\omega$ & DR $= x \cos\omega$. Tum ducta OF in DR normali, ob DOF

Tab. III. Fig. 18.

$= \omega$ erit $DF = a \sin \omega$ & $OF = a \cos\omega$: ex quibus efficitur $OQ = p = x \cos\omega - a \sin\omega$ & $PQ = x \sin\omega + a \cos\omega = q$, eritque propterea:

$$dp = dx \cos\omega - x d\omega \sin\omega - a d\omega \cos\omega$$

$$dq = dx \sin\omega + x d\omega \cos\omega - a d\omega \sin\omega$$

$$ddp = ddx \cos\omega - 2dx d\omega \sin\omega - x dd\omega \sin\omega - x d\omega^2 \cos\omega - a dd\omega \cos\omega + a d\omega^2 \sin\omega$$

$$ddq = ddx \sin\omega + 2dx d\omega \cos\omega + x dd\omega \cos\omega - x d\omega^2 \sin\omega - a dd\omega \sin\omega - a d\omega^2 \cos\omega$$

Hinc erit: $p \cos\omega + q \sin\omega = x$; & $q \cos\omega - p \sin\omega = a$ atque

$$dp \cos\omega + dq \sin\omega = dx = a d\omega \quad \Big| \quad ddp \cos\omega + ddq \sin\omega = ddx - x d\omega^2 - a dd\omega$$

$$dq \cos\omega - dp \sin\omega = x d\omega \quad \Big| \quad ddq \cos\omega - ddp \sin\omega = 2dx d\omega + x dd\omega - a d\omega^2.$$

§. LXVI. Si jam istæ vires ad directionem tum ipsius tubi DS tum rectæ Mm ad eum normalis reducantur, ob ang: $SPp = MPq = \omega$, ex vi $Pp = \frac{2A\,ddp}{dt^2}$ oritur vis in directione $PS = \frac{2A\,ddp \cos\omega}{dt^2}$, & in directione Pm vis $= \frac{2A\,ddp \sin\omega}{dt^2}$. Simili modo ex vi $Pq = \frac{2A\,ddq}{dt^2}$ resultat in directione PS vis $= \frac{2A\,ddq \sin\omega}{dt^2}$ & in directione PM vis $= \frac{2A\,ddq \cos\omega}{dt^2}$: unde necesse est ut corpus in P sollicitetur secundum directionem tubi PS vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega + ddq \sin\omega) =$

2 A (ddx

$\frac{2A(ddx - xd\omega^2 - addw)}{dt^2}$ & in directione PM vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddq \operatorname{cof}\omega - ddp \operatorname{fin}\omega) = \frac{2A(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)}{dt^2}$. Poterunt etiam, si ad rectam OP normalis ducatur Ll, vires istæ sollicitantes revocari ad directiones $P\pi$ & PL: cum enim sit fin $SP\pi =$ fin MPL $= \frac{a}{z}$ & cof $SP\pi =$ cof MPL $= \frac{x}{z}$, ex vi PS oritur vis in directione $P\pi = \frac{2Ax}{zdt^2}(ddx - xd\omega^2 - addw)$ & in directione $Pl = \frac{2Aa}{zdt^2}(ddx - xd\omega^2 - addw)$. Deinde autem ex vi PM orietur vis in directione $P\pi = \frac{2Aa}{zdt^2}(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)$ & in directione PL $=$ $\frac{2Ax}{zdt^2}(2dxd\omega + xdd\omega - ad\omega^2)$. Hinc colligendo vis requiretur corpus directe ab axe O secundum $P\pi$ avellens $=$ $\frac{2A}{zdt^2}(xddx + 2adxd\omega - (aa + xx)d\omega^2)$; tum vero altera quæ corpus in directione PL ad illam normali urgeat $=$ $\frac{2A}{zdt^2}(2xdxd\omega - addx + (aa + xx)dd\omega)$. His igitur viribus cognitis, quæ ad motum conservandum requiruntur, facile est pro quovis casu, quando vires sollicitantes dantur, motum definire.

§. LXVII. Ponamus neque in tubum neque in corpus ullas vires externas agere, atque adeo motum utriusque a

 sola

sola pressione mutua affici. Quæ quoniam ad tubum est normalis, ponamus vim, qua tubus a corpore in directione ad tubum D S normali P M sollicitatur esse $= P$, atque ipsum corpus a tubo reprimetur secundum directionem Pm vi $= P$. Vis igitur tubum accelerantis momentum erit $= P$. $DP = Px$, supra autem jam invenimus ad hunc motum accelerandum requiri momentum virium $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$; unde obtinemus hanc æquationem: $\frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = Px$. Deinde si vim, qua corpus urgetur, comparemus cum viribus, quas ante invenimus secundum directiones P S & P M, nanciscemur has æquationes:

$$\frac{2Addx - 2Axd\omega^2 - 2Aadd\omega}{dt^2} = 0$$

$$\frac{4Adxd\omega + 2Axdd\omega - 2Aad\omega^2}{dt^2} = -P.$$

Quodsi ex hac postrema & prima pressio P eliminetur prodibit:

$$2Axdxd\omega + Axxdd\omega - Aaxd\omega^2 + Mkkdd\omega = o$$

secunda autem æquatio transit in hanc:

$$Addx - Axd\omega^2 - Aadd\omega = o,$$

quæ per a multiplicata & ab illa subtracta relinquit:

$$2Axdxd\omega + A(aa + xx)dd\omega - Aaddx + Mkkdd\omega = o,$$

cujus integrale est: $A(aa+xx)d\omega - Aadx + Mkkd\omega = Efdt\sqrt{f}$. Deinde si hæc per $d\omega$ & prior per dx multiplicetur ambæque addantur, habebitur:

Adx

$$A\,dx\,ddx + A\,x\,dx\,d\omega^2 + A(aa+xx)\,d\omega\,dd\omega - A\,a\,d\omega\,ddx - A\,a\,dx\,dd\omega + Mk^2\,d\omega\,dd\omega = o.$$

Cujus integrale eſt:

$$A\,dx^2 + A(aa+xx)\,d\omega^2 - 2A\,a\,d\omega\,dx + Mk^2\,d\omega^2 = Fg\,dt^2.$$

Ab hac æquatione ſubtrahatur prior integralis per $d\omega$ multiplicata, eritque $A\,dx^2 - A\,a\,dx\,d\omega = Fg\,dt^2 - Ef\,d\omega\,dt\,\sqrt{f}$. Eliminato ergo $d\omega$ orietur æquatio inter x & dt, quæ facile reſolvitur.

§. LXVIII. Conſideremus nunc tubum curvilineum OPS, qui quidem in plano ad axem O normali gyretur, cujus maſſa ſit $= M$ & momentum inertiæ $= Mkk$, in eoque incluſum ſit corpus P, cujus maſſa $= A$. Quo igitur hujus corporis motum dijudicare queamus, eum ad directiones fixas reduci oportet, quoniam leges motus hujusmodi directiones reſpiciunt. Referatur ergo curvedo tubi OPS ad rectam OV, quæ cum ipſo tubo circa axem gyretur, & initio quidem temporis t hæc recta OV ſitum tenuerit OQ, ita ut interea motu angulari cum tubo deſcripſerit angulum $QOV = \omega$, unde virium momentum ad accelerationem tubi requiſitum erit $= \frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2}$ ſumto dt conſtante. Ad hanc igitur rectam OQ locus corporis referatur, ſitque demiſſo PQ in OQ perpendiculo $OQ = p$ & $QP = q$. Quare ductis Pp & Pq ipſis OQ & QP parallelis corpus P ſollicitari debet in directione Pp vi $= \frac{2A\,ddp}{dt^2}$, & in directione Pq vi $=$ *Tab. III. Fig. 19.*

$2A\,ddq$

$\frac{2 A ddq}{dt^2}$. Jam natura curvæ O P S exprimatur æquatione inter coordinatas O V $= u$ & V P $= v$, hujusmodi enim æquatio, quia recta O V cum tubo æqualiter promoveri ponitur, modo consueto naturam curvæ exhibebit. At ob angulum Q O V $= \omega$ erit O Q $= p = u \operatorname{cos} \omega + v \operatorname{sin} \omega$ & P Q $= q = u \operatorname{sin} \omega - v \operatorname{cos} \omega$, hinc erit

$$dp = du \operatorname{cos} \omega - u d\omega \operatorname{sin} \omega + dv \operatorname{sin} \omega + v d\omega \operatorname{cos} \omega$$

$$dq = du \operatorname{sin} \omega + u d\omega \operatorname{cos} \omega - dv \operatorname{cos} \omega + v d\omega \operatorname{sin} \omega$$

$$ddp = ddu \operatorname{cos} \omega - 2 du d\omega \operatorname{sin} \omega - u d\omega^2 \operatorname{cos} \omega - u dd\omega \operatorname{sin} \omega + ddv \operatorname{sin} \omega + 2 dv d\omega \operatorname{cos} \omega - v d\omega^2 \operatorname{sin} \omega + v dd\omega \operatorname{cos} \omega$$

$$ddq = ddu \operatorname{sin} \omega + 2 du d\omega \operatorname{cos} \omega - u d\omega^2 \operatorname{sin} \omega + u dd\omega \operatorname{cos} \omega - ddv \operatorname{cos} \omega + 2 dv d\omega \operatorname{sin} \omega + v d\omega^2 \operatorname{cos} \omega + v dd\omega \operatorname{sin} \omega.$$

§. LXIX. Si jam vires ante inventæ ad directiones P v & P u his ordinatis O V & P V parallelas referantur, invenietur vis in directione P v sollicitans $= \frac{2 A}{dt^2} (ddp \operatorname{cos} \omega + ddq \operatorname{sin} \omega)$ $= \frac{2 A}{dt^2} (ddu - u d\omega^2 + 2 dv d\omega + v dd\omega)$

& vis in directione P $u = \frac{2 A}{dt^2} (ddp \operatorname{sin} \omega - ddq \operatorname{cos} \omega) =$ $\frac{2 A}{dt^2} (-2 du d\omega - u dd\omega + ddv - v d\omega^2)$.

Ducatur jam ad curvam normalis M P m, atque hæ vires referantur ad directiones P M & P S, reperieturque si elementum curvæ $\sqrt{(du^2 + dv^2)} = ds$ ponatur, ob sin S P $v = \frac{dv}{ds}$

& cos

& cos $SPv = \frac{du}{ds}$, vis in directione $PS = \frac{2A}{dt^2 ds}$ $(duddu + dvddv + dd\omega(vdu - udv) - d\omega^2(vdv + udu))$ & vis in directione
$PM = \frac{2A}{dt^2 ds}$ $(dvddu - duddv + 2d\omega(dv^2 + du^2) + ddu (vdv + udu) + d\omega^2 (vdu - udv))$. Si jam ducatur ad curvam in P tangens PT in eamque ex O perpendicularis OT vocetur $PT = x$; $OT = y$, & recta $OP = \sqrt{(xx + yy)} = z$; erit $\frac{zdz}{x} = ds = \sqrt{(dv^2 + du^2)}$, itemque $zz = uu + v^2$, unde fit $vdv + udu = zdz$, & $dvddv + duddu = dsdds$. Deinde si tangens PT rectam OV in X secet erit $VX = \frac{vdu}{dv}$, $PX = \frac{vds}{dv}$, porroque $OX = \frac{udv - vdu}{dv}$ & hinc $OT = y = \frac{udv - vdu}{ds}$ & $TX = \frac{udvdu - vdu^2}{dvds}$. Ex quibus colligitur $PT = x = \frac{vdv + udu}{ds}$; atque si radius curvaturæ PR statuatur $= r$ erit $\frac{ds^3}{duddv - dvddu} = r = \frac{zdz}{dy}$, & $duddv - dvddu = \frac{ds^3}{r} = \frac{dyds^3}{zdz} = \frac{dyds^2}{x}$. His valoribus substitutis, sicque u & v exclusis erit vis $PS = \frac{2A}{dt^2}(dds - ydd\omega - \frac{zdzd\omega^2}{ds}) = \frac{2A}{dt^2}(dds - ydd\omega - xd\omega^2)$; vis $PM = \frac{2A}{dt^2}(\frac{-dyds}{x}$

$+ 2ds$

$+2ds\,d\omega + \frac{z\,dz\,dd\omega}{ds} - y\,d\omega^2) = \frac{2A}{dt^2}(\frac{-dy\,ds}{x} + 2ds\,d\omega + x\,dd\omega - y\,d\omega^2)$ existente $ds = \frac{z\,dz}{x} = dx + \frac{y\,dy}{dx}$.

§. LXX. Si neque tubus neque corpus in eo ab ullis viribus externis ſollicitetur, omnis motus perturbatio a ſola preſſione mutua corporis in tubum orietur; ſit igitur vis qua corpus in P premit ſecundum directionem normalem $PM = P$, ab eodem corpus viciſſim premetur in directione Pm vi $= P$, nullam vero vim in directione PS patitur. Quo circa motus tubi ſequentes binas ſuppeditabit æquationes:

I. $\frac{2A}{dt^2}(dds - x\,d\omega^2 - y\,dd\omega) = 0$ ſeu $dds - x\,d\omega^2 - y\,dd\omega = 0$.

II. $\frac{2A}{dt^2}\left(2ds\,d\omega - y\,d\omega^2 + x\,dd\omega - \frac{dy\,ds}{x}\right) = -P$.

Deinde cum hujus preſſionis $PM = P$ momentum ad motum tubi accelerandum ſit $= Px$, habebitur quoque hæc æquatio

III. $\frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2} = Px$.

Eliminetur ex æquat. II & III preſſio P prodibitque

$$2A\,ds\,d\omega - Ay\,d\omega^2 + Ax\,dd\omega - \frac{A\,dy\,ds}{x} + \frac{Mkk\,dd\omega}{x} = 0$$

ſeu multiplicando per x hæc:

IV. $2Ax\,ds\,d\omega - Axy\,d\omega^2 + (Axx + Mkk)\,dd\omega - A\,dy\,ds = 0$.

Ex prima autem æquatione eſt $x\,d\omega^2 = dds - y\,dd\omega$, quo valore hic introducto fiet:

2 A x

$2Axdsd\omega - Aydds + (Azz + Mkk)dd\omega - Adyds = 0$

quæ ob $xds = zdz$ tranſit in hanc:

V. $2Azdzd\omega + (Azz + Mkk)dd\omega - Aydds - Adyds = 0$

cujus integrale eſt

VI. $(Azz + Mkk)d\omega - Ayds = Efdt\sqrt{f}$.

quæ æquatio continet conſervationem momenti motus rotatorii: voco autem momentum motus rotatorii productum ex motu rotatorio in diſtantiam ab axe. Sic corporis A celeritas ſecundum tubum eſt $= \frac{ds}{dt}$, quæ per $\frac{y}{z}$ multiplicata dat ejus celeritatem gyratoriam in plagam contrariam directam, hinc $\frac{Ayds}{zdt}$ erit ejus motus rotatorius & $\frac{-Ayds}{dt}$ momentum motus rotatorii, quatenus in tubo procedit. Quatenus autem cum tubo gyratur, erit ejus celeritas rotatoria $= \frac{zd\omega}{dt}$ motus rotatorius $= \frac{Azd\omega}{dt}$ & momentum motus rotatorii $= \frac{Azzd\omega}{dt}$; ſimilique modo totius tubi momentum motus rotatorii erit $= \frac{Mkkd\omega}{dt}$.

§. LXXI. Multiplicetur æquatio prima per Ads eritque:

$Adsdds - Axdsd\omega^2 - Aydsdd\omega = 0$ ſeu

$Adsdds - Azdzd\omega^2 - Aydsdd\omega = 0$.

Hæc addatur ad æquationem V per $d\omega$ multiplicatam, ac ſumma erit

$A z dz d\omega^2 + (Azz + Mkk) d\omega dd\omega + A ds dds - A(y ds dd\omega + y d\omega dds + dy ds d\omega) = o$ cujus integrale eſt:

VII. $(Azz + Mkk)\, d\omega^2 + A ds^2 - 2 A y ds d\omega = Fg dt^2$ hæcque æquatio complectitur principium conſervationis virium vivarum. Unde manifeſtum eſt hæc duo principia, ſi ad ſolutionem hujus quæſtionis adhibita fuiſſent, ſtatim ſuppeditatura fuiſſe has duas æquationes integrales, ad quas methodo directa utentes non niſi poſt plures operationes pertigimus. Contrahunt ergo hæc principia calculum mirifice, dum labori integrationis parcitur. Atque hoc quidem caſu iſtæ binæ æquationes ſufficientes ſunt ad problema reſolvendum, cum tres tantum habeamus variabiles z, s & ω. Verum ſi plura corpora in hujusmodi tubo quoque ineſſent, tum pluribus etiam opus eſſet æquationibus ad problema ſolvendum, quas hæc principia præbere non valent. Ceterum etiam præſenti caſu hæc principia quantitatem preſſionis corporis in tubum ſponte non oſtendunt, cum ea tamen ex noſtris formulis primum inventis facile cognoſcatur. Cum enim ex æquatione tertia ſit $\frac{2 dd\omega}{dt^2} = \frac{Px}{Mkk}$, hoc valore in ſecunda ſubſtituto erit $\frac{4 A ds d\omega}{dt^2} - \frac{2 A y d\omega^2}{dt^2} - \frac{2 A dy ds}{x dt^2} + \frac{APxx}{Mkk} = -P$; unde oritur $P = \frac{2A(dy ds + yx d\omega^2 - 2x ds d\omega) Mkk}{(Axx + Mkk) x dt^2}$ ubi ſi radius osculi r introducatur ob $dy = \frac{x ds}{r}$, erit $P = \frac{2 A Mkk(ds^2 : r + y d\omega^2 - 2 ds d\omega)}{(Axx + Mkk) dt^2}$.

§. LXXII.

§. LXXII. Cum autem ob curvaturam tubi datam æquatio habeatur inter z & ds, motus tam tubi quam corporis in ipſo facile definitur. Cum enim ex æquatione VI ſit

$$dt^2 = \frac{((Azz + Mkk)\,d\omega - Ayds)^2}{EEf^3}$$

ſi brevitatis gratias ponatur $\frac{EEf^3}{Fg} = Hhh$, erit hunc valorem in æquatione VII ſubſtituendo:

$$(Azz + Mkk)\,Hhhd\omega^2 + AHhhds^2 - 2AHhhydsd\omega =$$
$$(Azz + Mkk)^2 d\omega^2 - 2Ay(Azz + Mkk)dsd\omega + AAy^2ds^2$$

unde per extractionem radicis obtinetur:

$$d\omega = \frac{Ayds}{Azz + Mkk} - \frac{hds}{Azz + Mkk} \sqrt{\frac{AH(Axx + Mkk)}{Azz + Mkk - Hhh}}$$

Hincque porro fit

$$Efdt\sqrt{f} = \pm hds \sqrt{\frac{AH(Axx + Mkk)}{Azz + Mkk - Hhh}}$$

Simili quoque modo motus tubi cum corpore incluſo definiri poſſet, ſi tubus ſive rectus ſive curvus non in plano ad axem rotationis normali ſit poſitus; atque ſi etiam duplicem habeat curvaturam: hoc enim caſu primum oporteret motum corporis ad tres directiones fixas revocare, viresque his motibus convenientes deinde ad alias directiones, quas tubus quovis ſitu præbet, reducere. Verum calculus fieret prolixus minusque concinnus, eumque ideo eo magis prætermittimus, quod methodus, qua uti conveniat hic ſatis ſit explicata, facileque ad hujusmodi caſus magis complicatos, quoties opus fuerit, accommodari queat.

Sectio III.

De motu corporum in tubis libere mobilibus.

§. LXXIII.

Pervenimus nunc ad problematis, quod tractare ſuſcepimus, caſum præcipuum eumque difficillimum, quem nemo adhuc, quantum ſcio, eſt aggreſſus, niſi quando tubus in circulum incurvatus ejusque centrum gravitatis in ipſo circuli centro poſitum aſſumitur. Perſpicuum autem ſtatim eſt, hoc caſu motum tubi fore mixtum ex progreſſivo & gyratorio, & gyratorium quidem, quoniam tubus libere mobilis ſtatuitur, circa ejusmodi axem peragi debere, qui nullas vires ſuſtineat. Quamobrem præcepta in ſuperiori ſectione tradita huc quoque transferri poterunt, dummodo ii caſus inveſtigentur, quibus axis, quem ante poſuimus fixum, nullas ſollicitationes patitur; tum enim axis, etiamſi a nulla vi externa retineatur, nihilominus ſitum ſuum conſervare poterit. Supra autem (41) vires definivimus, quibus ſingula axis puncta a motu gyratorio urgentur, quæ ergo ſi vel nullæ fuerint, vel ſe mutuo deſtruant, corpus circa eundem axem libere gyrari poterit. Quos caſus quo facilius inveſtigemus, primo totum tubi corpus, quaſi in eodem plano ad axem gyrationis normali poſitum eſſet, conſiderabimus, ita ut univerſa materia, quæ gyratur in eodem plano ad axem

normali

normali exiſtere cenſeatur. Deinde vero corpora ſecundum axis longitudinem extenſa perpendemus, indagaturi cujusmodi ſitum axis habere debeat, ut inter gyrandum nullas vires ſentiat. Poſtquam autem explicuerimus, cujusmodi motus in corpora libere mobilia cadere, in iisque perſeverare poſſint, in effectus virium ſollicitantium inquiremus, ut motus immutatio inde oriunda definiri poſſit.

§ LXXIV. Repræſentet ergo planum ABCD corpus tubi, quod circa axem per hoc planum in O normaliter transeuntem gyretur. Sit in data ab axe diſtantia $OF = f$, celeritas puncti F, qua circa O ſecundum plagam Ff gyratur debita altitudini $= u$; atque ponatur maſſa totius corporis $= M$, ejusque centrum gravitatis in G, quod ergo circa O gyrabitur ſecundum Gg celeritate altitudini $= \frac{OG^2 . u}{ff}$ debita. Hoc igitur motu gyratorio, uti ſupra (41) docuimus, axis ſecundum directionem OG trahetur vi $= \frac{2M . OG . u}{ff}$; eandem ſcilicet vim ſuſtinebit, ac ſi totum corpus M in puncto G eſſet collectum, & celeritate altitudini $\frac{OG^2 . u}{ff}$ debita gyraretur: hoc enim modo vis centrifuga foret $= 2M . \frac{OG^2 . u}{ff} : OG = \frac{2M . OG . u}{ff}$. Tanta ergo vi opus erit ad axem O retinendum, ne iſti vi cedat; quare ſi corpus libere fuerit mobile, id circa ejusmodi axem gyrari non poterit, Tab. III. Fig. 20.

 quia

quia nulla vis axem continens adest. Cum autem hæc vis non evanescat, nisi distantia O G in nihilum abeat, corpus ABCD circa alium axem ad hoc planum normalem gyrari non poterit, nisi qui per ipsum centrum gravitatis G transeat. Quare si corpus hoc A B C D nactum fuerit motum circa axem per ejus centrum gravitatis G transeuntem & ad planum A B C D normalem, tum istum motum conservabit, axisque, etiamsi a nulla vi retineatur, tamen quasi fixus esset, immotus manebit, nisi motus a viribus externis perturbetur. Si ergo tota tubi massa in superficie plana ABCD fuerit distributa, ea vel nullum habebit motum gyratorium, vel gyrabitur circa axem per ejus centrum gravitatis G transeuntem.

§. LXXV. Si corpus non in superficie plana ad axem normali comprehendi queat, sed secundum axis longitudinem sit extensum, tum concipiatur id in innumeras tenuissimas lamellas ad axem normales dissectum, & quæ modo diximus ad quamlibet lamellam referri poterunt. Hinc ergo patet si axis per singularum lamellarum centra gravitatis transeat, tum singula quoque ejus puncta a motu gyratorio nullam vim sustinere, ideoque corpus circum hunc axem libere gyrari posse. Globus ergo ex materia uniformi confectus circa quemvis axem per ejus centrum gravitatis transeuntem libere gyrari poterit: singulæ enim rectæ per ejus centrum ductæ ita sunt comparatæ, ut simul per omnium sectionum ad se normalium centra gravitatis transeant; hocque

que itaque casu singula axis puncta nullam omnino vim sustinent. Præterea vero fieri potest, ut, etiamsi axis non per singularum sectionum centra gravitatis transeat, tamen cunctæ vires se mutuo destruant, sicque motus gyratorius circa ejusmodi axem æque subsistere possit. Ad hos casus evolvendos sit AB axis corpus quodcunque trajiciens; & concipiatur corpus in infinitas lamellas ad istum axem normales dissectum, quarum singularum centra gravitatis notentur. Hæc igitur centra gravitatis lineam quandam continuam constituent, vel in eodem plano sitam, vel duplici curvatura præditam. Sit primo hæc linea centrorum gravitatis EGF in eodem plano sita, ita ut ducta quacunque applicata QP ad AB normali, punctum Q sit centrum gravitatis sectionis corporis ad axem in puncto P normaliter factæ, atque punctum axis P sollicitabitur secundum directionem PQ, vi quadam, quam in §. præc. definivimus, quæ cum a celeritate motus gyratorii, tum a massa sectionis, tum etiam præcipue a quantitate intervalli PQ pendebit. *Tab. III. Fig. 21.*

§. LXXVI. Sit A extremum axis punctum, & vocetur $AP = x$, $PQ = y$, sitque massa sectionis in P ad axem normaliter factæ $= X$, erit X functio quædam ipsius x ex indole corporis cognoscenda. Motus porro gyratorius ita determinetur, ut particula ab axe intervallo $= f$ distans moveatur celeritate debita altitudini u, quo posito erit vis, qua axis punctum P in directione PQ sollicitatur $= \frac{2Xyu}{ff}$, pro

qua

qua cum $\frac{2u}{ff}$ ſit quantitas conſtans, conſideraſſe ſufficiet expreſſionem Xy, quæ ſi ſectioni ſeu lamellæ craſſities infinite parva $= dx$ tribuatur, abit in $Xy\,dx$, ita ut axis particula $Pp = dx$ in directione P Q ſollicitetur vi, quæ eſt ut $Xy\,dx$. Quo igitur hæ vires, quibus ſingula axis elementa urgentur, ſe mutuo deſtruant, neceſſe eſt ut primo ſumma omnium iſtarum virium nempe $\int Xy\,dx$ evaneſcat. Hinc intelligitur axis A B tranſire debere per omnium lamellarum, hoc eſt totius corporis, commune centrum gravitatis. Niſi enim hoc eſſet, diſtantia communis centri gravitatis a linea A B foret $= \frac{\int Xy\,dx}{\int X\,dx}$, quare cum ſit $\int Xy\,dx = o$, manifeſtum eſt axem A B, circa quem corpus libere gyrari queat, per corporis centrum gravitatis, quod ſit in G, tranſire debere. Hoc autem ſolum nondum ſufficit, ſed præterea requiritur, ut omnium harum virium momenta ſe invicem deſtruant. Eſt autem vis $Xy\,dx$ momentum reſpectu puncti fixi A $= Xxy\,dx$, unde quoque neceſſe eſt ut $\int Xxy\,dx = o$, ſeu cum ſit $\int Xyx\,dx = x\int Xy\,dx - \int dx \int Xy\,dx$ & $\int Xy\,dx = o$; oportet ut $\int dx \int Xy\,dx$ per totam axis longitudinem evaneſcat. Axis igitur A B ad liberam gyrationem idoneum ſitum non habebit, niſi fuerit & $\int Xy\,dx = o$ & $\int dx \int Xy\,dx = o$.

§. LXXVII. Sin autem linea centrorum gravitatis non ſit in eodem plano ſita; conſideretur ejus projectio orthogonalis in plano pro lubitu aſſumto & per axem A B tranſeunte.

eunte. Sit E G F ista projectio, & M centrum gravitatis sectionis ad axem normalis per P factæ, ita ut recta M Q sit perpendicularis in planum A G E. Ponatur $AP = x$, $PQ = y$ & $QM = z$, ac, si linea centrorum fuerit cognita, dabuntur duæ æquationes, quibus relatio inter tres coordinatus x, y & z continebitur. Sit porro massa sectionis istius per P factæ $= X$, & juncta P M erit vis qua axis punctum P in directione P M trahetur $= \frac{2Xu}{ff}$. P M seu ut X. P M, & axis elementum $Pp = dx$ sollicitabitur vi ut Xdx. P M. Resolvatur hæc vis secundum directiones constantes P Q & P R existente P R normali in planum A P Q, erit vis P Q ut $Xydx$ & vis P R ut $Xzdx$. Cum jam harum virium effectus debeat esse nullus, primo oportebit esse tam $\int Xydx$ quam $\int Xzdx = o$, quod evenit si axis A B per totius corporis commune centrum gravitatis G transeat. Praeterea vero quoque harum virium momenta se mutuo destruere debent, ut axis etiam non inclinetur, hincque fiet:

$$\int Xyx\,dx = o \quad \& \quad \int Xzx\,dx = o.$$

Nisi ergo præter transitum axis per corporis centrum gravitatis G hæ duæ æquationes locum inveniant, corpus circa ejusmodi axem libere gyrari non poterit. In sequentibus ergo perpetuo assumemus axem, circa quem tubus gyretur, non solum per ejus centrum gravitatis transire, sed etiam prædictas proprietates locum habere, ita ut axis, circa quem motus gyratorius absolvitur, nullam vim sentiat.

§. LXXVIII.

§. LXXVIII. Si igitur corpus circa hujusmodi axem a quacunque causa semel acceperit motum gyratorium, eundem hunc motum perpetuo uniformiter conservabit, nisi a viribus externis perturbetur. Supra enim ostendimus corpus circa quemcunque axem motu uniformi gyrari posse, dummodo iste axis firmiter retineatur, ne a viribus sollicitantibus mutetur; præsenti autem casu axis a motu gyratorio nullam vim suffert, ideoque circa eum corpus libere gyrari poterit; quia axis hic etiamsi a nulla vi retineatur, sponte quiescit. Neque vera solum corpus circa hujusmodi axem quiescentem uniformiter gyrabitur, sed etiam idem eveniet, si interea axis cum toto corpore uniformiter in directum promoveatur. Ex primis enim principiis motus constat, in systemate quorumcunque corporum eundem motum subsistere posse, sive totum systema quiescat, sive uniformiter in directum progrediatur. Si ergo corpori præter motum progressivum impressus fuerit motus gyratorius circa hujusmodi axem, qui per ejus centrum gravitatis transeat, & ante memoratis proprietatibus gaudeat, tum istud corpus vi propria inertiæ utrumque motum constanter tenebit: hoc est, uniformiter in directum promovebitur, simulque interea motu uniformi circa eundem axem gyrari perget. Hoc igitur casu in corpore duplex inerit motus, quorum uterque secundum præcepta ante tradita seorsim cognoscetur & definietur: motus scilicet progressivus ex motu axis, seu ex motu centri gravitatis, quod motus gyratorii non est particeps,

ceps, cognoſcetur, ex ejusque tam celeritate quam directione æſtimabitur. Motus gyratorius autem ad axem, qui etſi motu ſibi parallelo progreditur, tamen tanquam quieſceret, conſiderari poteſt, referri, & ex celeritate, quam datum corporis punctum ab axe dato intervallo remotum habet, definiri debebit. Mente igitur motum rotatorium tollere licebit, ut axis tanquam quieſcens ſpectetur, & motus gyratorius hinc reſultans inſuper cum motu progreſſivo, quem cogitatione ſuſtuleramus, iterum conjungatur.

§. LXXIX. Expoſito igitur modo hunc duplicem cujusque corporis libere mobilis motum contemplandi & ad calculum revocandi, videamus quomodo uterque motus a viribus ſollicitantibus immutetur. Ac primo quidem inveſtigemus qualis vis requiratur ad ſolum motum progreſſivum perturbandum. Habeat ergo corpus A B C D hujusmodi duplicem motum, quorum altero progreſſivo centrum gravitatis G uniformiter promoveatur ſecundum directionem G E celeritate debita altitudini v; ſimul vero circa axem idoneum per centrum gravitatis G ductum gyretur, ſitque puncti ab hoc axe intervallo $= f$ diſtantis celeritas debita altitudini $= u$, quæ ad hunc axem, quaſi quieſceret referatur. Maſſa autem totius corporis ſit $= M$. Jam ut ſolus motus progreſſivus acceleretur, gyratorio non mutato, neceſſe eſt ut ſingulæ corporis particulæ ſecundum directionem G E æqualibus viribus acceleratricibus urgeantur. Scilicet ſi altitudo v, dum centrum gravitatis G per ſpatiolum dx progreditur, *Tab. IV. Fig. 22.*

ditur, incrementum capiat $= dv$; particula corporis M quæ sit $= dM$ in directione Mm ipsi GE parallela urgeri debet vi $= \frac{dM.\,dv}{dx}$. Quodsi jam omnes istæ vires in unam colligantur, quia omnium eadem est directio, erit vis æquivalens $= \frac{M\,dv}{dx}$, ejusque directio per centrum gravitatis G transibit eritque GE. Quare vicissim si corpus ABCD sollicitetur secundum ipsius directionem motus progressivi GE, hæcque directio vis per centrum gravitatis G transeat, solus motus corporis progressivus afficietur, motusque gyratorius nullam mutationem patietur. Motus autem progressivi acceleratio ita se habebit, ut si vis sollicitans GE fuerit $=$ P, fiat $dv = \frac{P\,dx}{M}$; quod si ergo hæc vis P in plagam oppositam tendat, seu in sui negativam abeat, tum erit $dv = \frac{-P\,dx}{M}$.

§. LXXX. Sin autem directio motus progressivi sola inflecti debeat, ita ut neque celeritas centri gravitatis neque motus gyratorius immutetur, singulæ corporis particulas æqualibus viribus secundum directionem GH ad motus directionem GE normalem sollicitari oportet: si enim omnes æqualibus viribus acceleratricibus secundum eandem directionem pellantur, tum earum motus relativus inter se non perturbabitur, ideoque motus gyratorius immutatus manebit. Ponamus ergo motum progressivum ita inflecti debere, ut

viæ

viæ curvilineæ G F, quam proſequatur, radius osculi G H ſit $= r$, atque quælibet particula dM in directione GH urgeri debebit vi $= \frac{2 v dM}{r}$. Harum ergo omnium virium, quibus ſingulæ corporis particulæ pelluntur, media directio per centrum gravitatis G tranſibit, & in ipſam rectam GH incidet, totaque vis omnibus æquivalens erit $= \frac{2Mv}{r}$. Quare viciſſim ſi corpus ABCD in directione GH per centrum gravitatis G tranſeunte & ad motus directionem GE normali ſollicitetur vi $= Q$, tum neque motus gyratorius neque celeritas progreſſiva afficietur, ſed ſola motus progreſſivi directio GE ita in circulum GF incurvabitur, ut ejus radius GH ſit $= \frac{2Mv}{Q}$. Hinc ergo omnium virium, quarum directiones per centrum gravitatis G tranſeunt, effectus aſſignari poterunt: cum enim quæque ſecundum directiones GE & GH reſolvi queat, a priori celeritas motus progreſſivi vel augebitur vel diminuetur, a poſteriore autem directio ejus inflectetur, neutra autem in motu gyratorio ullam mutationem producet. Mutatio autem motus progreſſivi perinde erit comparata, ac ſi tota corporis maſſa in ejus centro gravitatis eſſet collecta, nullusque motus gyratorius adeſſet. Hinc ergo patet motum gyratorium nullam mutationem perpeti poſſe niſi a viribus, quarum directiones non per centrum gravitatis tranſeant.

§. LXXXI.

Tab. IV. Fig. 23. §. LXXXI. Investigemus nunc, a cujusmodi viribus corpus sollicitari debeat, ut ejus motus progressivus non afficiatur, sed solus motus gyratorius vel acceleretur, vel retardetur. Sit igitur G corporis cujuspiam centrum gravitatis, corpusque præter motum progressivum gyretur circa axem per centrum gravitatis G transeuntem & ad planum tabulæ normalem, quem si toti corpori motum æqualem & contrarium progressivum impressum concipiamus, tamquam quiescentem spectare poterimus. Sit puncti F, quod ab axe intervallo $FG = f$ distat, celeritas secundum directionem Ff ad GF normalem debita altitudini u, quæ, dum punctum F motu angulari per arculum $Ff = ds$ progreditur, augmentum capiat $= du$. Jam consideretur particula corporis quæcunque in M, cujus massula sit $= dM$, & distantia $GM = z$; hujusque particulæ celeritas secundum directionem MN ad GM normalem debita erit altitudini $= \frac{zzu}{ff}$. Dum autem punctum F elementum $Ff = ds$ percurrit, particula M motu suo absolvet spatiolum $\frac{zds}{f}$. Hinc ad istam motus rotatorii accelerationem requiritur, ut particula M sollicitetur, secundum directionem MN ad GM normali vi $= dM. \frac{zzdu}{ff} : \frac{zds}{f} = \frac{zdudM}{fds} = zdM. \frac{du}{fds}$; quæ ergo vis erit ut zdM quia $\frac{du}{fds}$ pro omnibus particulis est idem. Momentum ergo vis ad hanc accelerationem producendam est $=$

du.

$\frac{du}{fds}. zz\, dM$. Si igitur ſingulæ particulæ corporis per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe G multiplicentur & ſumma omnium productorum ponatur $= Mkk$, ita ut Mkk ſit momentum inertiæ reſpectu hujus axis gyrationis, erit $Mkk = \int zz\, dM$, ideoque ſumma omnium momentorum ad motum rotatorium accelerandum requiſitorum erit $= \frac{Mkk\, du}{fds}$. Seu ſi angulus tempuſculo infinite parvo dt motu angulari confectus ponatur $= d\omega$ ob $Vu = \frac{fd\omega}{dt}$ & $ds = fd\omega$, erit id momentum totale $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$, quæ expreſſio convenit cum ea, quam ſupra pro motu circa axem fixum invenimus.

§. LXXXII. Sola autem momentorum conſideratio non ſufficit ad indolem virium inventarum, quæ ad motum gyratorium accelerandum requiruntur, exprimendam: poſſunt enim diverſiſſimarum virium æqualia eſſe momenta reſpectu cujuspiam axis. Et quanquam in motu gyratorio nonniſi virium ſollicitantium momenta conſiderari ſolent, tamen hoc loco eas tantum vires perpendimus, quæ corpori nullum motum progreſſivum inducant, vel eum, quem jam forte habet, non mutent. Hinc inter infinitas illas vires, quarum omnium idem eſt momentum $\frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$, ea tantum ad præſens negotium eſt accommodata, quæ nullum motum progreſſi-

greſſivum generat. Ad hanc affectionem cognoſcendam, vires ſingulis corporis particulis applicatas ad directiones conſtantes reduci conveniet. In hunc finem aſſumatur recta GF, in eamque ex puncto M demittatur perpendiculum MP, ſitque $GP = x$ & $PM = y$, ita ut ſit $GM = z = \sqrt{(xx+yy)}$. Jam vis $MN = \frac{du}{fds} . zdM$ reſolvatur ſecundum directiones Mp & Mq, quarum illa ipſi GP eſt parallela, hæc vero cum PM congruit. Cum igitur ſit ang. $NMq = MGP$ & $NMp = GMP$, atque $\sin PGM = \frac{y}{z}$ & $\cos PGM = \frac{x}{z}$ erit vis in directione $Mp = \frac{du}{fds} . ydM$, & vis in directione $Mq = \frac{du}{fds} . xdM$. Quocirca omnium virium quarum directiones ſunt rectæ GF parallelæ, ſumma erit $= \frac{du}{fds} \int ydM$; at vero cum G ſit centrum gravitatis erit $\int ydM = o$, unde ſumma iſtarum virium erit $= o$. Simili modo ſumma omnium virium, quarum directiones ſunt ad rectam GF normales, erit $= \frac{du}{fds} . \int xdM$; verum ob rationem modo allegatam eſt quoque $\int xdM = o$, unde & hæc virium ſumma evaneſcet. Conſequenter ad accelerationem motus rotatorium ita efficiendum, ut motus progreſſivus non mutetur, ejusmodi viribus eſt opus, quæ ad conſtantes directiones reductæ ſe mutuo deſtruant, quarum tamen hoc non obſtante momentum ſit $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$.

§. LXXXIII.

§. LXXXIII. Fieri ergo nequit, ut unica vis corpori applicata ejus motum gyratorium solum afficiat motu progressivo intacto, unica enim vis simul evanescere atque momentum reale habere non potest, nisi forte vis infinite parva in distantia infinita per vectem agens huc censeatur. Ad hunc igitur effectum producendum duæ ad minimum vires, ut F H & P M requiruntur, quæ sint æquales & in directionibus parallelis contrariæ, diversisque intervallis ab axe remotæ: summa enim harum duarum virium, quia altera est affirmativa, altera negativa, fit $= o$, momentum tamen $FH.\,GF - PM.\,GP$ valorem obtinet realem. Scilicet si utraque vis F H & P M ponatur $= P$, erit earum momentum ad motum gyratorium retardandum $= P.\,FP$; unde fit $\frac{2Mkkdd\omega}{dt^2} = P.\,FP$ & $\frac{2dd\omega}{dt^2} = \frac{du}{fds} = \frac{P.\,FP}{Mkk}$. Hinc igitur cujusvis potentiæ corpori applicatæ effectus tam in motu progressivo quam gyratorio perturbando definiri poterit. Gyretur scilicet corpus libere circa axem per ejus centrum gravitatis G transeuntem & ad planum tabulæ normalem, sollicitetur que a vi $MN = P$, cujus directio in plano axem normaliter secante sit sita, in quam ex axe perpendicularis ducatur $GM = g$. Concipiatur corpori in G applicata vis $Gn = P$ in directione contraria & ipsi M N parallela Gn, atque ab his duabus viribus solus motus gyratorius ita afficietur, ut fit $Pg = \pm \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$, prout ea ad motum gy- *Tab. IV. Fig. 24.*

ratorium vel accelerandum vel retardandum tendit. Accedat nunc tertia vis $Gv = P$, ipsi Gn contraria, hæcque quia per axem transit, solum motum progressivum afficiet, gyratorium vero immutatum relinquet. Cognoscitur ergo effectus trium virium MN, Gn & Gv simul agentium, quarum cum binæ Gn & Gv se invicem tollant, effectus unius vis MN idem erit, in eoque consistet, ut primum motus progressivus perinde perturbetur, ac si eadem vis in directione sibi parallela Gv per axem transeunte esset applicata: motus gyratorius autem ab istius vis momento Pg vel accelerabitur vel retardabitur.

§. XXXIV. Ex his igitur omnium ejusmodi virium effectus assignari poterunt, quarum directiones sint in plano quopiam ad axem gyrationis normali positæ, seu quæ sint ita comparatæ, ut, si in centro gravitatis in directionibus sibi parallelis concipiantur applicatæ, hæ ad axem gyrationis futuræ sint normales. Quodsi autem directio vis cujusdam MN postquam in centrum gravitatis fuerit translata, sit ad axem obliqua, tum ipse quoque axis gyrationis inclinabitur corpusque tam complicatum nanciscetur motum, cujusmodi a nemine adhuc fuit definitus. Quamobrem hinc istiusmodi vires ad axem gyrationis obliquas prorsus excludimus, nisi earum directio per ipsum axem transeat, quia hoc casu solus motus progressivus afficitur, ejusque mutatio inde oriunda ante est definita. His igitur viribus exclusis, quotcunque vires corpus sollicitent sequentem habebimus regulam,

lam, cujus ope tam motus progreſſivi, quam gyratorii mutatio cognoſcetur. Primum ſcilicet omnes vires in directionibus ſibi parallelis in centrum gravitatis transferantur, ex iisque perturbatio motus progreſſivi methodo ante expoſita dijudicetur: eundem nempe hæ vires translatæ effectum præſtabunt, ac ſi tota corporis maſſa in centro gravitatis eſſet collecta. Deinde ſingularum virium ſollicitantium colligantur momenta reſpectu axis gyrationis, eaque prouti motui gyratorio vel conveniunt vel renituntur in unam ſummam aggregentur, ut habeatur totum virium ſollicitantium momentum motum gyratorium vel accelerans vel retardans, ex hocque momento per regulam ante datam ipſa acceleratio vel retardatio motus gyratorii determinabitur. En ergo præcepta, quæ ad motum corporum libere mobilium definiendum, ſequi oportet, ſiquidem corpus circa axem conſtantem, cujus proprietates ante deſcripſimus, gyretur, nullæque vires adſint, quæ hunc axem inclinare conentur.

§. LXXXV. His igitur traditis principiis ad opus, cui hæc ſectio eſt deſtinata, pertractandum progrediamur. Sit ergo primo propoſitus tubus rectus EF, qui ſuper plano horizontali, quod tabula repræſentet, libere ſit mobilis, ut ſuper eo tum motu progreſſivo tum etiam rotatorio circa axem verticalem per ejus centrum gravitatis G tranſeuntem moveri poſſit. Ponatur hujus tubi maſſa $= M$, ejusque momentum inertiæ ad axem gyrationis relatum $= Mkk$. In *Tab. IV. Fig. 25.*

hoc autem tubo inclusum sit corpus, cujus massa $= A$, atque tam ad motum tubi, quam corporis in eo inclusi definiendum referantur omnia ad lineam fixam A B in plano horizontali assumtam, quæ simul positionem tubi, quam initio motus tenuerit exhibeat, in eaque sit A punctum, in quo tubi centrum gravitatis G initio fuerit versatum. Tempore autem elapso t tubus pervenerit in situm E F, & demisso ex G in rectam AB perpendiculo GR ponatur $AR = p$ & $GR = q$, tum ex G ipsi A B parallela ducatur G L, eritque EGL angulus, quem tubus motu gyratorio jam descripsit, sit iste angulus $EGL = \omega$. Tum versetur nunc quidem corpus tubo inclusum in P, existente $GP = z$, & ex P in AB pariter perpendiculum P Q demittatur, vocenturque $AQ = x$ & $PQ = y$. Cum igitur sit angulus PGS $= \omega$, erit $PS = z \sin \omega$, & $GS = z \cos \omega$, unde fiet $AQ = x = p - z \cos \omega$ & $QP = y = q + z \sin \omega$. His præmissis primo ad motum gyratorium tubi accelerandum requiritur virium momentum $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$ posito dt constante; motum autem gyratorium tubi in plagam P l fieri assumimus, ut per eum angulus EGL continuo fiat major. Quare hinc de quavis potentia sollicitante judicium facile feretur, utrum ejus momentum ad motum gyratorium accelerandum an retardandum tendat.

§. LXXXVI. Motus porro tubi progressivus ex motu ipsius centri gravitatis G, in quo totam tubi massam collectam

ctam concipere licet, æstimari debet, qui secundum directiones Gr & Gg resolvatur eum coordinatis AR & RG consentientes. Erit ergo celeritas centri gravitatis in directione $Gr = \frac{dp}{dt}$ & in directione $Gg = \frac{dq}{dt}$, hincque ad priorem motum accelerandum requiritur vis sollicitans in directione $Gr = \frac{2M\,ddp}{dt^2}$, & ad posteriorem vis sollicitans in directione $Gg = \frac{2M\,ddq}{dt^2}$. Simili modo si motus corporis in P secundum pares directiones Pq & Pp resolvatur, erit celeritas in directione $Pq = \frac{dx}{dt} = \frac{dp - dz \cos\omega + z\,d\omega \sin\omega}{dt}$, hincque necesse est ut corpus in directione Pq sollicitetur vi $=$

$$\frac{2A\,ddx}{dt^2} = \frac{2A}{dt^2}(ddp - ddz\cos\omega + 2dz\,d\omega\sin\omega + z\,dd\omega\sin\omega + z\,d\omega^2\cos\omega)$$

Celeritas autem corporis in P secundum directionem Pp est $= \frac{dy}{dt} = \frac{dq + dz \sin\omega + z\,d\omega\cos\omega}{dt^2}$, ideoque in hac directione corpus urgeatur necesse est vi:

$$\frac{2A\,ddy}{dt^2} = \frac{2A}{dt^2}(ddq + ddz\sin\omega + 2dz\,d\omega\cos\omega + z\,dd\omega\cos\omega - z\,d\omega^2\sin\omega)$$

Si hæ vires ad directiones cum tubi tum ad eum normales reducantur, ipse primum tubus in directione GF sollicitabitur vi $= \frac{2M}{dt^2}(ddp\cos\omega - ddq\sin\omega)$, & in directione ad eam normali Gs vi $= \frac{2M}{dt^2}(ddp\sin\omega + ddq\cos\omega)$.

 Dein-

Deinde corpus in P sollicitabitur secundum directionem tubi P F vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddx \cos\omega - ddy \sin\omega)$ quæ abit in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz + zd\omega^2)$$

secundum directionem normalem P *l* vero vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddx \sin\omega + ddy \cos\omega)$, quæ abit in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega + 2dzd\omega + zdd\omega).$$

§. LXXXVII. Ponamus neque tubum neque corpus in eo ab ullis viribus externis sollicitari; ita ut omnis motus mutatio a sola pressione corporis in tubum oriatur. Premat ergo corpus P tubum secundum directionem P L ad tubum normalem vi $=$ P; ac primo quidem ab hac vi, cujus momentum est $=$ Pz motus gyratorius retardabitur, unde oritur ista æquatio: $\frac{2Mkk\,dd\omega}{dt^2} = -Pz$. Deinde concipiatur hæc vis in sua directione in centrum gravitatis G transferri, quæ solum motum secundum directionem G *s* minuet, altero secundum G F immutato; hincque binæ sequentes nascentur æquationes:

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega) = 0$$

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega) = -P.$$

Postea vero corpus a tubo reprimetur in directione contraria

P *l* vi

Pl vi $= P$; ab hac ergo ſolus corporis motus ſecundum directionem Pl augebitur, alter autem motus in directione PF prorſus non afficietur; ex quo binæ hæ æquationes reſultabunt:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz - z\,d\omega^2) = 0$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin\omega + ddq \cos\omega + 2dzd\omega + zdd\omega) = P.$$

Quodſi ex æquatione primum inventa valor $P = \frac{-2Mkkdd\omega}{z\,dt^2}$ in reliquis ſubſtituatur, totum negotium ad ſequentes quatuor æquationes perducetur:

I. $ddp \cos\omega - ddq \sin\omega = 0$.

II. $zddp \sin\omega + zddq \cos\omega - kkdd\omega = 0$.

III. $ddp \cos\omega - ddq \sin\omega - ddz + zd\omega^2 = 0$.

IV. $Azddp \sin\omega + Azddq \cos\omega + 2Azdzd\omega + Azzdd\omega + Mkkdd\omega = 0$.

Hinc ex prima & tertia oritur V. $ddz - zd\omega^2 = 0$ & ex II. & IV. naſcitur hæc VI. $2Azdzd\omega + (Akk + Azz + Mkk)dd\omega = 0$.

§. LXXXVIII. Si porro æquatio I per $z\cos\omega$ & II per $\sin\omega$ multiplicetur, earum ſumma erit:

VII. $zddp - kkdd\omega \sin\omega = 0$.

Sin autem prima per $z\sin\omega$ multiplicata, a ſecunda per $\cos\omega$ multiplicata ſubtrahatur, remanebit:

VIII. $zddq - kkdd\omega \cos\omega = 0$.

Ex ſexta autem eſt $kkdd\omega = \frac{-2Azdzd\omega - Azzdd\omega}{A + M}$ quo valore ſubſtituto æquatio VII tranſit in

IX. (A +

IX. $(A+M)\,ddp + 2A\,dz\,d\omega\,\sin\omega + Az\,dd\omega\,\sin\omega = 0$
at æquatio VIII in:

X. $(A+M)\,ddq + 2A\,dz\,d\omega\,\cos\omega + Az\,dd\omega\,\cos\omega = 0$.
Jam æquatio VI integrata dat:

XI. $Azz\,d\omega + (A+M)\,kk\,d\omega = E\,dt$.

Quodſi autem ab IX ſubtrahatur V per A cosω multiplicata integrale erit:

XII. $(A+M)\,dp - A\,dz\,\cos\omega + Az\,d\omega\,\sin\omega = F\,dt$,

ſin autem ad X addatur V per A ſinω multiplicata, ſummæ integrale erit:

XIII. $(A+M)\,dq + A\,dz\,\sin\omega + Az\,d\omega\,\cos\omega = G\,dt$.

Hæ poſtremæ æquationes denuo integratæ dabunt.

XIV. $(A+M)\,p - Az\,\cos\omega = Ft + \mathfrak{F}$.

XV. $(A+M)\,q + Az\,\sin\omega = Gt + \mathfrak{G}$.

Ex XI vero eſt $d\omega = \frac{E\,dt}{(A+M)kk+Azz}$ qui in V ſubſtitutus dat:

$$\frac{ddz}{z} = \frac{E^2\,dt^2}{((A+M)\,kk+Azz)^2}.\ \text{ſeu}$$

$$\frac{dz\,ddz}{dt^2} = \frac{E^2\,z\,dz}{((A+M)kk+Azz)^2}\ \text{cujus integrale eſt}$$

XVI. $\frac{dz^2}{dt^2} = H - \frac{E^2 : A}{(A+M)\,kk+Azz}$ unde fit

$$dt = dz\,\sqrt{\frac{A(A+M)\,kk + AAzz}{AH(A+M)kk - EE + AAHzz}}.$$

§. LXXXIX. Ut iſtas conſtantes per integrationes ingreſſas debito modo definiamus, ad ſtatum initialem eſt ſpe-

ctandum

ctandum, in quo tubum E F rectæ A B ita incubuisse assumimus, ut centrum gravitatis G in punctum A incidisset. Posito ergo $t = o$ fiet tam $p = o$, & $q = o$, quam $\omega = o$, tum autem sumamus celeritatem tubi angularem fuisse $= \theta$, ita ut facto $t = o$ fiat $\frac{d\omega}{dt} = \theta$, progressivum autem ita fuisse comparatum ut essent celeritates $\frac{dp}{dt} = m$ & $\frac{dq}{dt} = n$. Porro initio fuerit distantia corporis in tubo a centro gravitatis $= a$, & celeritas inde recedens $= \alpha$; ita ut posito $t = o$ fiat $z = a$ & $\frac{dz}{dt} = \alpha$. Hinc ex æquatione XI ad initium applicata erit $Aaa\theta + (A+M)kk\theta = E$; ex XII erit $(A+M)m - A\alpha = F$, & ex XIII. $(A+M)n + Aa\theta = G$. Tum ex æquatione XIV fiet: $-Aa = \mathfrak{F}$; & ex XV. $o = \mathfrak{G}$. Denique ex æquatione XVI. habebitur:

$$\alpha^2 = H - \frac{E^2 : A}{(A+M)kk + Aaa} \text{ seu } H = \alpha^2 + \frac{E^2 : A}{(A+M)k^2 + Aaa}$$

hincque singulæ constantes sequentes valores habebunt:

$$E = \theta(Aaa + Akk + Mkk)$$

$$F = (A+M)m - A\alpha; \quad \mathfrak{F} = -Aa$$

$$G = (A+M)n + Aa\theta; \quad \mathfrak{G} = o \text{ \&}$$

$$H = \alpha^2 + (aa + kk)\theta\theta + \frac{Mkk\theta\theta}{A}$$

ex quibus denique oritur

$$dt = dz\sqrt{\frac{(A+M)kk + Azz}{((A+M)kk + Azz)\alpha\alpha + ((A+M)kk + Aaa)(zz - aa)\theta\theta}}$$

 unde

unde z ad datum tempus t definitur. Porro erit:

$$d\omega = \frac{((A+M)kk+Aaa)\,\theta dt}{(A+M)kk+Azz}.$$

hincque ad datum tempus angulus ω cognoscitur: Denique est

$$p = \frac{Az\cos\omega+((A+M)m-A\alpha)t-Aa}{A+M} \;\&$$

$$q = \frac{-Az\sin\omega+((A+M)n+Aa\theta)t}{A+M}.$$

§. XC. Quo naturam hujus solutionis clarius inspiciamus, quia est $dx = dp - dz\cos\omega + zd\omega\sin\omega$, æquatio duodecima abibit in hanc $Mdp+Adx = Fdt$, quæ si tota tubi massa in ejus centro gravitatis G concipiatur collecta, indicat commune centrum gravitatis tubi & corporis uniformiter secundum directionem ipsi A B parallelam progredi. Deinde quia est $dy = dq + dz\sin\omega + zd\omega\cos\omega$ æquatio XIII transit in hanc $Mdq+Ady = Gdt$, quæ indicat commune centrum gravitatis tubi & corporis secundum directionem ad AB normalem uniformiter progredi. Hinc conficitur communis centri gravitatis tubi & corporis motum esse uniformem & in directum progredientem, quod cum ex principiis mechanicis necessario evenire debeat, hinc duæ æquationes sine ulteriori calculo statim colligi potuissent. Ex his quoque æquationibus patebit summam virium vivarum tubi & corporis quæ est $= Mdp^2 + Mdq^2 + Mkkd\omega^2 + Adx^2 + Ady^2$ perpetuo esse constantem, ex hocque ergo principio tertia æquatio confici posset. Verum solutio hujus

hujus quæſtionis quatuor æquationes poſtulat, neque principium adhuc conſtat, unde quarta æquatio formari poſſet. Æquatio quidem undecima videtur ad conſtans quoddam principium deducere, quod analogum ſit momento motus rotatorii ſupra explicato. Cum enim $\frac{z\,d\omega}{dt}$ ſit celeritas corporis gyratoria, erit $\frac{Azzd\omega}{dt}$ ejus momentum motus rotatorii, & $\frac{Mkkd\omega}{dt}$ eſt momentum motus rotatorii ipſius tubi; cum igitur ſit $\frac{Azzd\omega}{dt} + \frac{Mkkd\omega}{dt} + \frac{Akkd\omega}{dt} = E$ ſumma momentorum motus rotatorii, una cum quantitate $\frac{Akkd\omega}{dt}$ (quæ indicaret momentum motus rotatorii, ſi corpus A in diſtantia k ab axe verſaretur) erit quantitas conſtans. Hoc autem principium commode verbis exprimi nequit.

§. XCI. Conſideremus nunc tubum curvilineum quemcunque EPF ſuper plano horizontali, quod plano tabulæ indicetur, libere mobilem. Sit ejus centrum gravitatis in G, per quod pro lubitu recta ducatur GE, quæ cum tubo moveatur, & ad quam tubi curvedo referatur. Ponatur maſſa tubi $= M$, ejusque momentum inertiæ ad axem gyrationis verticaliter per G tranſeuntem relatum $= Mkk$. Initio quidem motus recta EG inciderit in AB & centrum gravitatis G in punctum A, unde hanc rectam AB immobilem pro directrice principali aſſumemus. Corpus *Tab. IV. Fig. 26.*

 autem

autem huic tubo inclusum initio versatum sit in E, cujus massa $= A$. Jam elapso tempore t teneat tubus EPF cum recta GE situm, quem figura repræsentat, corpus autem in eo versetur in P. Ex G ad rectam AB perpendicularis demittatur Gr, voceturque AR $= p$ & RG $= q$, eritque centri gravitatis G celeritas secundum directionem $Gr = \frac{dp}{dt}$, & secundum directionem $Gg = \frac{dq}{dt}$; unde ad corpus tubi ratione motus progressivi in directione Gr accelerandum requiritur vis $= \frac{2Mddp}{dt^2}$, & in directione Gg vis $= \frac{2Mddq}{dt^2}$. Porro ducatur recta GS rectæ AB parallela, sitque angulus EGS $= \omega$, erit ω angulus, quem tubus ab initio motu gyratorio confecit, qui angulus tempusculo dt augebitur elemento $= d\omega$, quare ad accelerationem motus gyratorii requiritur momentum virium $= \frac{2Mkkdd\omega}{dt^2}$. Deinde sit corporis P a centro gravitatis G distantia GP $= z$, & angulus EGP $= \Phi$, erit ducta ad GE normali PM, hæc PM $= z \sin \Phi$ & GM $= z \cos \Phi$, unde erit elementum curvæ EP $= \sqrt{(z^2 + zzd\Phi^2)}$. Quare si arcus EP, seu spatium a corpore ab initio in tubo percursum ponatur $= s$, erit $ds = \sqrt{(dz^2 + zzd\Phi^2)}$. Quodsi jam ad curvaturam tubi ducatur normalis PL, erit anguli ELP sinus $= \frac{-dz \cos\Phi + zd\Phi \sin\Phi}{ds}$ & cosinus $= \frac{dz \sin\Phi + zd\Phi \cos\Phi}{ds}$. Hinc erit anguli GPL sinus

ſinus $= \frac{dz}{ds}$ & coſinus $= \frac{z\,d\Phi}{ds}$; hancobrem ex G in PL demiſſum perpendiculum $GT = \frac{zdz}{ds}$ & $PT = \frac{zz\,d\Phi}{ds}$. Sit $PT = v$ & $GT = u$ erit $zz = vv + uu$ & $u = \frac{zdz}{ds}$ atque $v = \frac{zz\,d\Phi}{ds}$; ideoque $ds = \frac{zdz}{u}$ & $d\Phi = \frac{vdz}{uz}$.

§. XCII. Demittatur nunc quoque ex P ad AB perpendiculum PQ & vocentur $AQ = x$ & $QP = y$, erit celeritas corporis ſecundum directionem $Pq = \frac{dx}{dt}$ & ſecundum directionem $Pp = \frac{dy}{dt}$. Unde ad accelerationem corporis requiritur in directione Pq vis $= \frac{2Addx}{dt^2}$, & in directione Pp vis $= \frac{2Addy}{dt^2}$. At cum ſit angulus $PGS = \omega + \Phi$ erit $PS = z\,\text{ſin}(\omega + \Phi)$ & $GS = z\,\text{coſ}(\omega + \Phi)$, hincque erit $x = p - z\,\text{coſ}(\omega + \Phi)$ & $y = q + z\,\text{ſin}(\omega + \Phi)$, ideoque

$$dx = dp - dz\,\text{coſ}(\omega + \Phi) + z\,(d\omega + d\Phi)\,\text{ſin}\,(\omega + \Phi)$$

$$dy = dq + dz\,\text{ſin}\,(\omega + \Phi) + z\,(d\omega + d\Phi)\,\text{coſ}(\omega + \Phi) \quad \&$$

$$ddx = ddp - ddz\,\text{coſ}(\omega + \Phi) + 2dz\,(d\omega + d\Phi)\,\text{ſin}\,(\omega + \Phi) + z\,(d\omega + d\Phi)^2\,\text{coſ}(\omega + \Phi) + z\,(dd\omega + dd\Phi)\,\text{ſin}(\omega + \Phi)$$

$$ddy = ddq + ddz\,\text{ſin}\,(\omega + \Phi) + 2dz(d\omega + d\Phi)\,\text{coſ}(\omega + \Phi) - z(d\omega + d\Phi)^2\,\text{ſin}\,(\omega + \Phi) + z(dd\omega + dd\Phi)\,\text{coſ}(\omega + \Phi)$$

quos valores in formulis ante pro viribus inventis non ſubſtituamus, ſed compendii cauſa retineamus literas x & y donec

 com-

commodum fuerit eas per ſubſtitutionem exterminare. Ab his autem duabus viribus corpus a centro gravitatis G directe repelletur vi $= \frac{2A}{dt^2}(ddy \sin(\omega + \varphi) - ddx \cos(\omega + \varphi))$, quæ abit in $\frac{2A}{dt^2}(ddq \sin(\omega + \Phi) - ddp \cos(\omega + \Phi) + ddz - z(d\omega + d\Phi)^2)$. Deinde corpus ad directionem GP normaliter ad angulum EGP augendum ſollicitabitur vi $= \frac{2A}{dt^2}$ $(ddy \cos(\omega + \Phi) + ddx \sin(\omega + \Phi))$ quæ abit in ſequentem expreſſionem:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddq \cos(\omega + \Phi) + ddp \sin(\omega \pm \Phi) + 2dz(d\omega + d\Phi) + z(dd\omega + dd\Phi))$$

Hinc quoque vires determinari poſſent cum ſecundum directionem tubi tum ſecundum directionem ad illam normalem agentes, ſed præſtabit vires actu ſollicitantes ad directiones ante uſurpatas revocare, cum iſtæ expreſſiones multo fiant ſimpliciores, quam illæ ſi ad alias directiones transferrentur.

§. XCIII. Ponamus nullas vires ſollicitantes externas adeſſe, omnemque motus mutationem a ſola preſſione corporis in tubum proficiſci, ſit iſta preſſio $=$ P, & quia ejus directio eſt ad tubum normalis, ſit ea PL; ejusque momentum ad motum gyratorium accelerandum erit $=$ Pz ſin GPL $= \frac{Pz\,dz}{ds} =$ Pu. Ut jam appareat quantum hæc vis motum tubi progreſſivum ſit perturbatura, concipiatur eadem in directione Gs ipſi PL parallela applicata. Eſt vero ang.

LGr

$LGr = EGS = \omega$, & $LGs = GLP$, cujus ſinus eſt $= \frac{-dz \cos\phi + z\,d\phi \sin\phi}{ds}$ & coſinus $= \frac{dz \sin\phi + z\,d\phi \cos\phi}{ds}$, hinc erit anguli sGr ſinus $= \frac{-dz \cos(\omega+\phi) + z\,d\phi \sin(\omega+\phi)}{ds}$ & coſinus $= \frac{dz \sin(\omega+\phi) + z\,d\phi \cos(\omega+\phi)}{ds}$: Quare ex vi $Gs = P$ naſcitur vis in directione $Gr = \frac{P(dz \sin(\omega+\phi) + z\,d\phi \cos(\omega+\phi))}{ds}$ & in directione $Gg = \frac{P(dz \cos(\omega+\phi) - z\,d\phi \sin(\omega+\phi))}{ds}$. unde naſcentur ſequentes æquationes:

$$\frac{2M\,ddp}{dt^2} = \frac{P(dz \sin(\omega+\phi) + z\,d\phi \cos(\omega+\phi))}{ds}$$

$$\frac{2M\,ddq}{dt^2} = \frac{P(dz \cos(\omega+\phi) - z\,d\phi \sin(\omega+\phi))}{ds}$$

quæ præbent ſequentes formas:

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \cos(\omega+\phi) - ddq \sin(\omega+\phi)) = \frac{P z\,d\phi}{ds}$$

$$\frac{2M}{dt^2}(ddp \sin(\omega+\phi) + ddq \cos(\omega+\phi)) = \frac{P\,dz}{ds}.$$

Cum igitur ex prima æquatione ſit $P = \frac{2M\,kk\,dd\omega}{u\,dt^2}$ ſi hic valor ſubſtituatur prodibunt hæc æquationes:

$$ddp \cos(\omega+\phi) - ddq \sin(\omega+\phi) = \frac{kkz\,d\phi\,dd\omega}{u\,ds} = \frac{k^2\,d\phi\,dd\omega}{dz}$$

$$ddp \sin(\omega+\phi) + ddq \cos(\omega+\phi) = \frac{kk\,dz\,dd\omega}{u\,ds} = \frac{kk\,dd\omega}{z}.$$

Eſt

Eſt enim $u\,ds = z\,dz$. Ad has igitur duas æquationes reducitur motus tubi cum progreſſivus tum gyratorius; cum quibus, ſi æquationes ex motu corporis oriundæ conjungantur, problema reſolvetur.

§. XCIV. A preſſionis autem reactione corpus tubo incluſum in P urgebitur in directione Pl vi $= -P$, quæ pariter ſecundum directiones Pq & Pp reſoluta dabit pro directione Pq vim $= \frac{-P(dz \sin(\omega+\phi) + z\,d\phi \cos(\omega+\phi))}{ds}$ & pro directione Pp vim $= \frac{-(dz \cos(\omega+\phi) - z\,d\phi \sin(\omega+\phi))}{ds}$.
Hinc habebuntur iſtæ æquationes:

$$\frac{2A\,ddx}{dt^2} = \frac{-P(dz \sin(\omega+\phi) + z\,d\phi \cos(\omega+\phi))}{ds}$$

$$\frac{2A\,ddy}{dt^2} = \frac{-P(dz \cos(\omega+\phi) - z\,d\phi \sin(\omega+\phi))}{ds}.$$

Ex his autem porro efficitur:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddx \cos(\omega+\phi) - ddy \sin(\omega+\phi)) = \frac{-P z\,d\phi}{ds}$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddx \sin(\omega+\phi) + ddy \cos(\omega+\phi)) = \frac{-P\,dz}{ds}$$

quæ uti ſupra (92) oſtendimus abibunt in:

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \cos(\omega+\phi) - ddq \sin(\omega+\phi) - ddz + z(d\omega+d\phi)^2) = \frac{-P z\,d\phi}{ds}$$

$$\frac{2A}{dt^2}(ddp \sin(\omega+\phi) + ddq \cos(\omega+\phi) + 2dz(d\omega+d\phi) + z(dd\omega+dd\phi))$$

$$= -\frac{P\,dz}{ds}.$$

Hæ

Hæ æquationes cum binis ante inventis comparatæ dabunt:

$$(A+M)\,ddp\cos(\omega+\Phi)-(A+M)\,ddq\sin(\omega+\Phi)-Addz+Az(d\omega+d\Phi)^2=0$$

$$(A+M)\,ddp\sin(\omega+\Phi)+(A+M)\,ddq\cos(\omega+\Phi)+2Adz(d\omega+d\Phi)+Az(dd\omega+dd\Phi)=0$$

si harum æquationum prior per $\cos(\omega+\Phi)$ & posterior per $\sin(\Phi+\Phi)$ multiplicetur, summæ integrale erit:

$$(A+M)\,dp-Adz\cos(\omega+\varphi)+Az(d\omega+d\varphi)\sin(\omega+\varphi)=F\,dt$$

porroque integrando erit:

$$(A+M)\,p-Az\cos(\omega+\varphi)=Ft+\mathfrak{F}$$

simili modo eruetur hæc æquatio integralis

$$(A+M)\,dq+Adz\sin(\omega+\Phi)+Az(d\omega+d\varphi)\cos(\omega+\Phi)=G\,dt$$

quæ denuo integrata dat:

$$(A+M)\,q+Az\sin(\omega+\Phi)=Gt+\mathfrak{G},$$

quas æquationes principium motus æquabilis in directum communis centri gravitatis quoque suppeditat.

§. XCV. Cum autem ex §. 93. sit:

$$ddp\cos(\omega+\Phi)-ddq\sin(\omega+\Phi)=\frac{k^2\,d\Phi\,dd\omega}{dz}\ \&$$

$$ddp\sin(\omega+\varphi)+ddq\cos(\omega+\varphi)=\frac{k^2\,dd\omega.}{z}$$

erit his valoribus in æquationibus differentio-differentialibus præcedentibus substituendis.

$$\frac{(A+M)\,k^2\,d\Phi\,dd\omega}{dz}=Addz-Az(d\omega+d\varphi)^2$$

$$\frac{(A+M)\,k^2\,d\Phi\,dd\omega}{z}=-Adz(d\omega+d\varphi)-Az(dd\omega+dd\Phi)$$

si hæc æquatio multiplicetur per z erit

$$(A+M)k^2 dd\omega + Azz(dd\omega + dd\Phi) + 2Azdz(d\omega + d\Phi) = 0$$

cujus integrale est:

$$(A+M)kkd\omega + Azz(d\omega + d\Phi) = Edt.$$

unde fit $d\omega = \frac{Edt - Azzd\Phi}{(A+M)k^2 + Azz}$, & $d\omega + d\Phi = \frac{Edt + (A+M)k^2 d\Phi}{(A+M)kk + Azz}$

$$dd\omega = \frac{-A(A+M)k^2 zzdd\Phi - AAz^4 dd\Phi - 2A(A+M)k^2 zdzd\Phi - 2AEzdzdt}{((A+M)k^2 + Azz)^2}$$

qui valores in illa æquatione substituti præbent

$$E^2 zdzdt^2 = (A+M)^2 k^4 zzd\Phi dd\Phi + A(A+M)k^2 z^4 d\Phi dd\Phi + (A+M)^2 k^4 zdzd\Phi^2 + (A+M)^2 k^4 dzddz + 2A(A+M)k^2 z^2 dzddz + A^2 z^4 dzddz$$

quæ posito $d\Phi = rdz$ & $dt = \frac{dz}{\sqrt{R}}$ abibit in hanc:

$$E^2 zdz = ((A+M)k^2 + Azz)(A+M)k^2 Rzzrdr + (A+M)^2 k^4 Rzrrdz$$
$$\tfrac{1}{2}((A+M)k^2 + Azz)(A+M)k^2 z^2 r^2 dR + \tfrac{1}{2}((A+M)k^2 + Az^2)^2 dR.$$

Ex qua æquatione, cum Φ ideoque r per z detur, definiri poterit valor quantitatis R ex sola variabili z, hincque porro tempus t per z, tumque angulus ω & quantitates p & q per z determinabuntur.

§. XCVI. Quodsi autem æquatio differentialis secundi gradus ante inventa dividatur per $((A+M)kk + Azz)^2$ orietur:

$$\frac{E^2 zdzdt^2 - (A+M)kkzzd\Phi dd\Phi((A+M)kk + Azz) - (A+M)^2 k^4 zdzd\Phi^2}{((A+M)kk + Azz)^2}$$

$= dzddz$ cujus integrale est:

dz^2

$$dz^2 = H dt^2 - \frac{E^2 dt^2 : A - (A+M) k^2 z^2 d\Phi^2}{(A+M) kk + Azz} \text{ seu}$$

$$(A+M) kk dz^2 + A zz dz^2 + (A+M) k^2 zz d\Phi^2 = dt^2 (H(A+M) k^2 + HAzz - E^2 : A)$$

unde fit:

$$dt = \sqrt{\frac{((A+M) kk + Azz) dz^2 + (A+M) k^2 zz d\Phi^2}{H(A+M) k^2 + HAzz - E^2 : A}}$$

quia igitur Φ per z dari ponitur, ex hac æquatione ad datum tempus t, tam diſtantia z quam angulus Φ, hoc eſt locus corporis in tubo aſſignari poterit: Qua relatione inter t & z inventa, erit:

$$d\omega = \frac{E dt - Azz d\Phi}{(A+M) k^2 + Azz}.$$

Invento autem angulo ω, ideoque tubi motu gyratorio reperietur quoque motus progreſſivus tubi ex his æquationibus:

$$p = \frac{Ft + \mathfrak{F} + Az \cos(\omega + \Phi)}{A+M}$$

$$q = \frac{Gt + \mathfrak{G} - Az \sin(\omega + \Phi)}{A+M}$$

ubi conſtantes quantitates E, F, G, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ & H, ex ſitu & motu initiali cum tubi tum corporis in ipſo definiri debent, eo ſcilicet modo, quo pro tubo recto ſumus uſi. Atque adeo hoc problema difficillimum, quod in iſta ſectione reſolvere ſuſcepimus, perfecte ſolutum dedimus.

§. XCVII. Conſideremus autem ſtatum initialem, quem ſuperiores formulæ exhibere debent, ſi ponatur $t = 0$. Quia

 ergo

ergo hoc casu angulus EGS evanescit erit $\omega = o$; celeritas autem gyratoria tubi tum fiat $\frac{d\omega}{dt} = \theta$. Deinde quia hoc tempore corpus in E hæsisse posuimus, sit GE $= a$, hocque loco $dz = \zeta d\Phi$ seu $d\varphi = \frac{dz}{\zeta}$. Quia porro celeritas corporis in tubo secundum tubi ductum est $= \frac{V(dz^2 + zzd\Phi^2)}{dt}$, erit ea initio motus $= \frac{d\Phi V(\zeta\zeta + aa)}{dt}$. Ponatur ista celeritas $= \alpha$, erit $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\alpha}{V(aa + \zeta\zeta)}$ & $\frac{dz}{dt} = \frac{\alpha\zeta}{V(aa + \zeta\zeta)}$, si ponatur $t = o$. Statuatur brevitatis gratia A + M $=$ N, atque ex superioribus æquationibus constantes E & H ita determinabuntur, ut sit

$$E = (Nkk + Aaa)\theta + \frac{Aaa\alpha}{V(aa + \zeta\zeta)} \quad \&$$

$$H = \alpha\alpha + \frac{2aa\alpha\theta}{V(aa + \zeta\zeta)} + \frac{(Nkk + Aaa)\theta\theta.}{A}$$

Sit porro $N = A + M = nA$, atque ultima æquatio integrata inter t & z abibit in hanc formam $\alpha^2 dt^2 (nkk + zz) + (zz - aa) dt^2 \left((nkk + aa)\theta^2 + \frac{2aa\alpha\theta}{V(aa + \zeta\zeta)}\right) = (nkk + zz) dz^2 + nkkzzd\Phi^2$

unde oritur:

$$dt = V \frac{(nkk + zz) dz^2 + nkkzzd\Phi^2}{\alpha^2(nkk + zz) + \theta(zz - aa)\left((nkk + aa)\theta + \frac{2aa\alpha}{V(aa + \zeta\zeta)}\right)}$$

Tum

Tum vero erit:

$$d\omega = \frac{(nkk + aa)\,\theta\, dt + aa\alpha\, dt : V(aa + \zeta\zeta) - zz\, d\Phi}{nkk + zz}.$$

§. XCVIII. Ponatur porro anguli GEP, quem tubus in E cum recta GE constituit sinus $= \gamma$, erit $\gamma = \frac{a\, d\Phi}{V(dz^2 + a^2 d\Phi^2)}$ $= \frac{\alpha}{V(aa + \zeta\zeta)}$ & $V(aa + \zeta\zeta) = \frac{\alpha}{\gamma}$, quo valore substituto erit:

$$E = A\,\theta\,(nkk + aa) + A\, a\alpha\gamma$$
$$H = \alpha\alpha + 2a\alpha\gamma\theta + (nkk + aa)\,\theta\theta$$

hincque porro:

$$dt = V\, \frac{(nkk + zz)\, dz^2 + nkkzz\, d\Phi^2}{\alpha^2\,(nkk + zz) + \theta\,(zz - aa)\,(2a\alpha\gamma + (nkk + aa)\,\theta)}$$

Introducantur insuper lineæ supra adhibitæ PT $= v$ & GT $= u$, quarum illa est normalis ad curvam, hoc vero tangenti in P parallela, seu PT $= v$ æquatur perpendiculo ex G in tangentem demisso, & GT $= u$ portioni tangentis resectæ; eritque $z\,d\Phi = \frac{v\,dz}{u}$, & $(nkk + zz)\,dz^2 + nkkzz\,d\Phi^2 =$ $\frac{(nkk + uu)\,zz\,dz^2}{uu}$ ob $vv + uu = zz$, hinc ergo erit:

$$dt = \frac{z\,dz\,V(nkk + uu)}{u\,V(\alpha^2\,(nkk + zz) + \theta\,(2a\alpha\gamma + (nkk + aa)\,\theta)\,(zz - aa))}$$

$$\& \; d\omega = \frac{dt\,(a\alpha\gamma + (nkk + aa)\,\theta)}{nkk + zz} - \frac{v\,z\,dz}{u\,(nkk + zz)}.$$

Cum denique commune centrum gravitatis tubi & corporis vel quiescat vel uniformiter in directum progrediatur, po-

 namus

namus id in puncto A perpetuo quiescere fietque F $= o$, $\mathfrak{F} = o$, G $= o$ & $\mathfrak{G} = o$, & ob $A+M = nA$ erit:

$$p = \frac{z \cos(\omega + \phi)}{n}$$

$$\& \; q = \frac{-z \sin(\omega + \phi)}{n}$$

ideoque $pp + qq = \frac{zz}{nn}$, quæ proprietas ex communis centri gravitatis quiete sponte sequitur. Recta autem GP semper transibit per punctum A seu α eritque $G\alpha = \frac{Az}{A+M}$, ut ex natura centri gravitatis notum est.

§. XCIX. Si motus corporis in tubo initio ita temperetur ut sit: $nk^2\alpha^2 = a^2\theta(2a\alpha\gamma + (nkk + aa)\theta)$ seu

$$\alpha = \frac{a^3\gamma\theta \pm a\theta V(a^4\gamma\gamma + nkkaa + n^2k^4)}{nkk}$$

æquatio ante inventa multo fit simplicior abibitque in.

$$dt = \frac{dzV(nkk + uu)}{uV(\alpha^2 + 2a\alpha\gamma\theta + (nk^2 + aa)\theta\theta)}.$$

Si igitur detur æquatio inter u & z, hinc relatio apparet inter binas variabiles t & z. Est vero $V(\alpha^2 + 2a\alpha\gamma\theta + (nk^2 + aa)\theta\theta) = \frac{\alpha V(nkk + aa)}{a}$ ideoque $dt = \frac{adzV(nkk + uu)}{\alpha uV(nkk + aa)}$ ad quod requiritur ut sit:

$\alpha : \theta = a^3\gamma \pm aV(a^4\gamma\gamma + nk^2r^2 + n^2k^4) : nkk$

si ergo ponamus curvam EPF ita esse comparatam ut in ea sit u constans, erit hujus curvæ evoluta circulus centro G descri-

descriptus, atque si in E hujus curvæ cuspis, ubi e circulo egreditur, statuatur, erit ubique $u = a$, & in initio $E\gamma = o$. Pro tali ergo tubo erit in genere

$$dt = \frac{zdz\sqrt{(nkk+aa)}}{a\sqrt{(\alpha^2(nkk+zz)+(nkk+aa)\theta\theta(zz-aa))}}$$

sin autem sit $\alpha : \theta = a\sqrt{(nkk+aa)} : \sqrt{nkk}$, erit:

$dt = \frac{dz}{\alpha}$, & $t = \frac{z-a}{\alpha}$; tum vero fiet:

$d\omega = \frac{dz\sqrt{nkk(nkk+aa)}}{a(nkk+zz)} - \frac{zdz\sqrt{(zz-aa)}}{a(nkk+zz)}$ cujus integrale est

$$\omega = -\frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a} + \frac{\sqrt{(nkk+aa)}}{a} \text{ A tang. } \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{\sqrt{(nkk+aa)}}$$

& ob $d\Phi = \frac{dz\sqrt{(zz-aa)}}{az}$, erit $\Phi = \frac{\sqrt{(zz-aa)}}{a} + \text{A sin}\frac{a}{z}$.

unde $\omega + \Phi = A \text{ sin} \frac{a}{z} + \frac{\sqrt{(nkk+aa)}}{a} A \text{ cos} \sqrt{\frac{nkk+aa}{nkk+zz}}$.

sicque iste motus in hujusmodi tubo definiri poterit.

§. C. Præcipue autem hic casus attendi meretur quo curvatura tubi EPBF est circulus centrum in G habens positum. Erit ergo ubique ejus radius $GP = z = a$ & $\gamma = 1$, atque $u = o$. Cum igitur sit $dz = o$ fiet *Tab. IV. Fig. 27.*

$$dt = \frac{kad\Phi\sqrt{n}}{\alpha\sqrt{(nkk+aa)}} \text{ \& integrando}$$

$$t = \frac{ka\Phi\sqrt{n}}{\alpha\sqrt{(nkk+aa)}}$$

Deinde ob $\zeta = o$ erit:

$d\omega =$

$$d\omega = \theta dt + \frac{aadt}{nkk+aa} - \frac{aad\Phi}{nkk+aa} \text{ ergo}$$

$$\omega = \theta t + \frac{aat}{nkk+aa} - \frac{aa\Phi}{nkk+aa}, \text{ \& ob } \Phi = \frac{atV(nkk+aa)}{kaVn}.$$

$$\text{erit } \omega + \Phi = \theta t + \frac{aat}{nkk+aa} + \frac{aktVn}{aV(nkk+aa)}.$$

Denique eſt

$$p = \frac{a \operatorname{cof}(\omega+\Phi)}{n}$$

$$q = -\frac{a \operatorname{fin}(\omega+\Phi)}{n}.$$

ſiquidem commune centrum gravitatis in puncto A quieſcere aſſumatur. Erit ergo $pp + qq = \frac{aa}{nn}$, ideoque centrum circuli mobilis G circa punctum A circulum deſcribet, cujus radius $AG = \frac{a}{n} = \frac{Aa}{A+M}$, ſemper enim recta G P per commune centrum gravitatis A tranſire debet. Et quia hujus circuli elementum eſt $\frac{a}{n}(d\omega + d\Phi)$, punctum G in hoc circulo motu uniformi progredietur. Tum vero etiam tam ipſe tubus circa ſuum centrum G motu uniformi gyrabitur, quam corpus in ipſo uniformiter procedet. Hæc autem phænomena ex ipſa motus conſideratione facile colligi poſſunt, cum preſſio, quæ ſemper ſecundum G P eſt directa, neque motum tubi gyratorium neque motum corporis afficiat; quamobrem mirum non eſt, hunc caſum præ ceteris eſſe ſolutu facillimum.

TABU-

TABULÆ ASTRONOMICÆ SOLIS & LUNÆ.

Uberiorem motuum Solis ac Lunæ theoriam in peculiari tractatione ſum complexus; quæ quoniam nimis eſt ampla, quam ut in hoc diſſertationum faſciculo locum invenire poſſit, tabulas motuum ſolis & lunæ, quas inde conſtruxi, hic ſaltem in uſum Aſtronomorum exhibere conſtitui. Quanquam autem tot jam extant tabulæ ſolares, ut hæc theoria penitus exhauſta videatur, tamen has meas tabulas a ceteris ſatis diſtinctas eſſe arbitror. Primum enim ex collatione omnis ævi obſervationum ſatis clare equidem mihi oſtendiſſe videor, motum ſolis ſeu potius terræ nunc aliquanto concitatiorem eſſe quam olim, annique tropici quantitatem mediam ab antiquiſſimis temporibus ad noſtram ætatem usque aliquantillum minorem eſſe factam: neque hinc obſcure mihi colligere licuit quantitatem anni tropici mediam ſingulis ſeculis uno fere minuto ſecundo diminui. Hanc ob cau-

ſam motus ſolis medius non erit uniformis, uti in omnibus tabulis æſtimatur; vel potius longitudo ſolis media, quæ ex hypotheſi motus æquabilis colligitur, correctione indigebit, quæ eo major erit, quo longius ab initio hujus ſeculi, ad quod tabulas has accomodavi, receditur: in tabula ſcilicet longitudinis ſolis mediæ eam aſſumſi anni quantitatem, quam pro 1700 concluſi; unde ob continuam annorum diminutionem, tam ante quam poſt hanc epocham longitudo ſolis media hic exhibita augeri debebit, quam correctionem ultima tabulæ primæ columna indicat, ex qua patet, quo longius in antiquitatem recedamus, hanc correctionem eo magis fore notabilem.

Deinde neminem fore credo, qui dubitet, quin locus terræ ab attractione lunæ pauxillulum perturbetur; hujus igitur quoque perturbationis rationem habui, hincque ultimam tabellam adjeci, ex qua patet, quantum tam locus ſolis, quam ejus diſtantia a terra pro quovis ad lunam adſpectu immutetur. Interim tamen ſuſpicor nunc quidem has correctiones, quas ex aſſumta ſolis parallaxi horizontali $12\frac{1}{2}$ deduxeram, aliquanto fore minores; quoniam ex collatione theoriæ lunæ cum obſervationibus ſatis evidenter comperiſſe mihi videor, parallaxin ſolis horizontalem eſſe 10, neque discrimen ſemiſſem unius minuti ſecundi ſuperare. Malui tamen hanc tabellam retinere, cum error ſit imperceptibilis, donec de vera hujus perturbationis quantitate certius nobis conſtiterit.

Locum

Locum apogæi ſolis, & excentricitatem orbitæ ex obſervationibus Celeb. Monnieri, quas ipſe ad hunc ſcopum ſummo ſtudio inſtituit, collegi, adhibita ante commemorata correctione a luna oriunda: motum apogæi autem non diverſum conſtitui a præceſſione æquinoctii, quoniam argumenta, quibus Aſtronomi utuntur ad ſingularem apogæi motum evincendum, non ſatis firma videntur. Quamvis enim ætheri reſiſtentiam tribuamus, a qua annorum imminutio dubio procul ortum habeat, tamen inveni ab hujusmodi reſiſtentia poſitionem lineæ abſidum non affici: unde equidem mallem, ſi ulla apogæi variatio reſpectu ſtellarum fixarum certo demonſtrari poſſet, eam actioni cometæ cujusdam, qui prope terram aliquando præteriiſſet, adſcribere. Quocirca ſpero, niſi hæ tabulæ obſervationibus ſatis conſentaneæ deprehendantur, eas ſaltem certo perfectioni theoriæ ſolis, cui univerſa Aſtronomia innititur, eſſe inſervituras, neque ob hanc cauſam me inutiliter operam meam in hoc negotio conſumſiſſe.

Pervenio nunc ad tabulas meas lunares, quarum indolem conſtructionisque rationem declarare nimis foret prolixum. Tantum igitur moneo, eas ex eadem theoria attractionis, quam Neutonus feliciſſimo ſucceſſu in Aſtronomiam induxit, promanaſſe: cui theoriæ etiamſi jam plures tabulæ lunares ſuperſtructæ perhibeantur, tamen aſſeverare audeo, calculum, ad quem principium attractionis deducit, tantopere fieri implicatum, ut illæ tabulæ a theoria etiamnum

 longe

longe discrepare ſint cenſendæ: neque ego etiam profiteor me in his tabulis omnes motus inæqualitates, quas theoria continet, eſſe complexum; vèrumtamen omnes eas æquationes exhibui, quæ in obſervationibus ſunt perceptibiles atque ultra dimidium minutum primum aſſurgunt. Calculum enim mihi eousque producere licuit, ut titulos ſeu argumenta ſingularum inæqualitatum oſtenderet: ac plerarumque quidem æquationum veram quantitatem ſola theoria determinavit, nonnullas vero per obſervationes definire ſum coactus. Quædam etiam a diſtantia ſolis a terra ſeu ejus parallaxi horizontali pendent, quam primo noviſſimas obſervationes ſecutus, 12'', 30''' ſtatueram, ſed poſtmodum has æquationes cum obſervationibus comparans deprehendi, parallaxin ſolis 10 minutis ſecundis majorem aſſumi non poſſe. Ceterum qui has tabulas cum aliis adhuc editis comparabit, non leve discrimen ſtatim in ipſis titulis ſeu argumentis æquationum animadvertet; cum in plerisque utar anomalia tam ſolis quam lunæ excentrica, quæ quomodo ex anomalia media ſit invenienda, in utrisque tabulis ſeorſim expoſui. Deinde quoque omnes tabulas ita inſtruxi, ut etiamſi æquationum numerus major ſit quam in ullis aliis, tamen calculus facili labore ac breviori temporis ſpatio expediri poſſit. Denique cum omnes cauſæ, quæ locum lunæ afficiunt, ſimul ejus diſtantiam a terra immutent, plures tabulas adjunxi, quarum ope vera diſtantia lunæ a terra, ac proinde ejus parallaxis horizontalis cum diametro apparente cognoſci poteſt.

Tabula

Anno Per Jul.	Anno Christi	Longitudo media Solis				Anomalia media Solis				Longitudo Apogæi Solis				Distantia Solis à Luna				Correctio addit. ad Longit. med.		
14	Meridie ultimi Decembr. anni præteriti stylo veteri sub meridiano Berolinensi.	8s	1°	37′	31″	7s	25°	5′	10″	0s	6°	32′	21″	5s	20°	43′	25″	11°	22′	40″
1014		8	9	17	31	7	18	26	50	0	20	50	41	0	1	34	15	8	6	0
2014		8	16	57	31	7	11	48	30	1	5	9	1	6	12	25	5	5	22	40
3014		8	24	37	31	7	5	10	10	1	19	27	21	0	23	15	55	3	12	40
4014		9	2	17	31	6	28	31	50	2	3	45	41	7	4	6	45	1	36	0
4114		9	3	3	31	6	27	52	0	2	5	11	31	5	11	11	50	1	28	10
4214		9	3	49	31	6	27	12	10	2	6	37	21	3	18	16	55	1	20	40
4314		9	4	35	31	6	26	32	20	2	8	3	11	1	25	22	0	1	13	30
4414		9	5	21	31	6	25	52	30	2	9	29	1	0	2	27	5	1	6	40
4514		9	6	7	31	6	25	12	40	2	10	54	51	10	9	32	10	1	0	0
4614		9	6	53	31	6	24	32	50	2	12	20	41	8	16	37	15		54	0
4714	1	9	7	39	31	6	23	53	0	2	13	46	31	6	23	42	20		48	10
4814	101	9	8	25	31	6	23	13	10	2	15	12	21	5	0	47	25		42	40
4914	201	9	9	11	31	6	22	33	20	2	16	38	11	3	7	52	30		37	30
5014	301	9	9	57	31	6	21	53	30	2	18	4	1	1	14	57	35		32	40
5114	401	9	10	43	31	6	21	13	40	2	19	29	51	11	22	2	40		28	10
5214	501	9	11	29	31	6	20	33	50	2	20	55	41	9	29	7	45		24	0
5314	601	9	12	15	31	6	19	54	0	2	22	21	31	8	6	12	50		20	10
5414	701	9	13	1	31	6	19	14	10	2	23	47	21	6	13	17	55		16	40
5514	801	9	13	47	31	6	18	34	20	2	25	13	11	4	20	23	0		13	30
5614	901	9	14	33	31	6	17	54	30	2	26	39	1	2	27	28	5		10	40
5714	1001	9	15	19	31	6	17	14	40	2	28	4	51	1	4	33	10		8	10
5814	1101	9	16	5	31	6	16	34	50	2	29	30	41	11	11	38	15		6	0
5914	1201	9	16	51	31	6	15	55	0	3	0	56	31	9	18	43	20		4	10
6014	1301	9	17	37	31	6	15	15	10	3	2	22	21	7	25	48	25		2	40
6114	1401	9	18	23	31	6	14	35	20	3	3	48	11	6	2	53	30		1	30
6214	1501	9	19	9	31	6	13	55	30	3	5	14	1	4	9	58	35			40
6314	1601	9	19	55	31	6	13	15	40	3	6	39	51	2	17	3	40			10
6414	1701	9	20	41	31	6	12	35	50	3	8	5	41	0	24	8	45			0
6434	1721	9	20	50	43	6	12	27	52	3	8	22	51	5	7	33	46			1
6454	1741	9	20	59	55	6	12	19	54	3	8	40	1	9	20	58	47			2
6474	1761	9	21	9	7	6	12	11	56	3	8	57	11	2	4	23	43			4
6494	1781	9	21	18	19	6	12	3	58	3	9	14	21	6	17	48	49			6
6514	1801	9	21	27	31	6	11	56	0	3	9	31	31	11	1	13	50			10
6614	1901	9	22	13	31	6	11	16	10	3	10	57	21	9	8	18	55			40

Tabula motus medii solis in annis.

Annis Julianis	Motus Longitudo.	Motus Anom. med.	Motus Apogei.	Motus Lunæ à Sole.	Anni ab 1700	Correct. add. ad long. med.
1	11ˢ 29° 45′ 40″	11ˢ 29° 44′ 49″	0° 0′ 51″	4ˢ 9° 37′ 23″	20	0° 0′ 1″
2	11 29 31 20	11 29 29 37	0 1 43	8 19 14 47	40	0 0 2
3	11 29 17 0	11 29 14 26	0 2 34	0 28 52 10	60	0 0 4
4	0 0 1 50	11 29 58 24	0 3 26	5 20 41 0	80	0 0 6
5	11 29 47 30	11 29 43 13	0 4 17	10 0 18 23	100	0 0 10
6	11 29 33 10	11 29 28 1	0 5 9	2 9 55 47	150	0 0 22
7	11 29 18 50	11 29 12 50	0 6 0	6 19 33 10	200	0 0 40
8	0 0 3 41	11 29 56 49	0 6 52	11 11 22 0	250	0 1 2
9	11 29 49 21	11 29 41 38	0 7 43	3 20 59 23	300	0 1 30
10	11 29 35 1	11 29 26 26	0 8 35	8 0 36 47	350	0 2 2
11	11 29 20 41	11 29 11 15	0 9 26	0 10 14 10	400	0 2 40
12	0 0 5 31	11 29 55 13	0 10 18	5 2 3 1	450	0 3 22
13	11 29 51 11	11 29 40 2	0 11 9	9 11 40 24	500	0 4 10
14	11 29 36 51	11 29 24 50	0 12 1	1 21 17 48	550	0 5 2
15	11 29 22 31	11 29 9 39	0 12 52	6 0 55 11	600	0 6 0
16	0 0 7 22	11 29 53 38	0 13 44	10 22 44 1	650	0 7 2
17	11 29 53 2	11 29 38 27	0 14 35	3 2 21 24	700	0 8 10
18	11 29 38 42	11 29 23 15	0 15 27	7 11 58 48	750	0 9 22
19	11 29 24 22	11 29 8 4	0 16 18	11 21 36 11	800	0 10 40
20	0 0 9 12	11 29 52 2	0 17 10	4 13 25 1	850	0 12 2
40	0 0 18 24	11 29 44 4	0 34 20	8 26 50 2	900	0 13 30
60	0 0 27 36	11 29 36 6	0 51 30	1 10 15 3	950	0 15 2
80	0 0 36 48	11 29 28 8	1 8 40	5 23 40 4	1000	0 16 40
100	0 0 46 0	11 29 20 10	1 25 50	10 7 5 5	1100	0 20 10
200	0 1 32 0	11 28 40 20	2 51 40	8 14 10 10	1200	0 24 0
300	0 2 18 0	11 28 0 30	4 17 30	6 21 15 15	1300	0 28 10
400	0 3 4 0	11 27 20 40	5 43 20	4 28 20 20	1400	0 32 40
500	0 3 50 0	11 26 40 50	7 9 10	3 5 25 25	1500	0 37 30
600	0 4 36 0	11 26 1 0	8 35 0	1 12 30 30	1600	0 42 40
700	0 5 22 0	11 25 21 10	10 0 50	11 19 35 35	1700	0 48 10
800	0 6 8 0	11 24 41 20	11 26 40	9 26 40 40	1800	0 54 0
900	0 6 54 0	11 24 1 30	12 52 30	8 3 45 45	1900	1 0 10
1000	0 7 40 0	11 23 21 40	14 18 20	6 10 50 50	2000	1 6 40
2000	0 8 26 0	11 9 49 20	28 36 40	0 21 41 40	2500	1 44 10
3000	0 9 12 0	10 26 17 0	1ˢ 12 55 0	7 2 32 30	3000	2 30 0

Tabula medii motus ſolis in menſibus.

Menſes.	Motus med.				Motus Anom. med.				Motus Apogæi	Motus Lunæ à Sole.			
Januarius	0ˢ	0°	0′	0″	0ˢ	0°	0′	0″	0″	0ˢ	0°	0′	0″
Februar.	1	0	33	18	1	0	33	14	4	0	17	54	48
Martius	1	28	9	11	1	28	9	3	8	11	29	15	15
Aprilis	2	28	42	29	2	28	42	17	12	0	17	10	3
Majus	3	28	16	40	3	28	16	24	16	0	22	53	23
Junius	4	28	49	57	4	28	49	37	20	1	0	48	10
Julius	5	28	24	8	5	28	23	43	25	1	16	31	31
Auguſtus	6	28	57	25	6	28	56	56	29	2	4	26	19
Septemb.	7	29	30	43	7	29	30	10	33	2	22	21	7
Octobr.	8	29	4	54	8	29	4	17	37	2	28	4	26
Novemb.	9	29	38	12	9	29	37	30	42	3	15	59	14
Decemb.	10	29	12	22	10	29	11	36	46	3	21	43	35

Tabula medii motus solis in diebus.

Dies.	Motus medius solis.				Motus medius anomaliæ.				Motus Apogæi	Motus Lunæ a Sole.			
	s	°	'	"	s	°	'	"	"	s	°	'	"
1	0	0	59	8	0	0	59	8	0	0	12	11	27
2	0	1	58	17	0	1	58	17	0	0	24	22	53
3	0	2	57	25	0	2	57	25	0	1	6	34	20
4	0	3	56	33	0	3	56	33	0	1	18	45	47
5	0	4	55	42	0	4	55	42	0	2	0	57	13
6	0	5	54	50	0	5	54	50	0	2	13	8	40
7	0	6	53	59	0	6	53	58	1	2	25	20	7
8	0	7	53	7	0	7	53	6	1	3	7	31	33
9	0	8	52	15	0	8	52	14	1	3	19	43	0
10	0	9	51	23	0	9	51	22	1	4	1	54	27
11	0	10	50	32	0	10	50	31	1	4	14	5	54
12	0	11	49	40	0	11	49	39	1	4	26	17	20
13	0	12	48	49	0	12	48	47	2	5	8	28	47
14	0	13	47	57	0	13	47	55	2	5	20	40	14
15	0	14	47	5	0	14	47	3	2	6	2	51	40
16	0	15	46	13	0	15	46	11	2	6	15	3	7
17	0	16	45	22	0	16	45	20	2	6	27	14	34
18	0	17	44	30	0	17	44	28	2	7	9	26	0
19	0	18	43	38	0	18	43	36	2	7	21	37	27
20	0	19	42	47	0	19	42	44	3	8	3	48	53
21	0	20	41	55	0	20	41	52	3	8	16	0	20
22	0	21	41	3	0	21	41	0	3	8	28	11	47
23	0	22	40	12	0	22	40	9	3	9	10	23	13
24	0	23	39	20	0	23	39	17	3	9	22	34	40
25	0	24	38	28	0	24	38	25	3	10	4	46	7
26	0	25	37	37	0	25	37	34	3	10	16	57	33
27	0	26	36	46	0	26	36	42	4	10	29	9	0
28	0	27	35	54	0	27	35	50	4	11	11	20	27
29	0	28	35	2	0	28	34	58	4	11	23	31	54
30	0	29	34	10	0	29	34	6	4	0	5	43	20
31	1	0	33	18	1	0	33	14	4	0	17	54	47
32	1	1	32	26	1	1	32	22	4	1	0	6	14

Tabula motus medii solis in horis & minutis.

Horæ. Minuta. Secunda.	Motus medius.			Motus Lunæ à Sole			Horæ. Minuta. Secunda	Motus medius.			Motus Lunæ à Sole		
	°	'	''	°	'	''		°	'	''	°	'	''
	'	''	'''	'	''	'''		'	''	'''	'	''	'''
	''	'''	IV	''	'''	IV		''	'''	IV	''	'''	IV
1	0	2	28	0	30	28	31	1	16	23	15	44	47
2	0	4	56	1	0	57	32	1	18	51	16	15	16
3	0	7	24	1	31	26	33	1	21	19	16	45	45
4	0	9	51	2	1	55	34	1	23	47	17	16	14
5	0	12	19	2	32	23	35	1	26	15	17	46	42
6	0	14	47	3	2	52	36	1	28	43	18	17	11
7	0	17	15	3	33	20	37	1	31	11	18	47	39
8	0	19	43	4	3	49	38	1	33	39	19	18	8
9	0	22	11	4	34	17	39	1	36	6	19	48	36
10	0	24	38	5	4	47	40	1	38	34	20	19	5
11	0	27	6	5	35	15	41	1	41	2	20	49	33
12	0	29	34	6	5	44	42	1	43	30	21	20	2
13	0	32	2	6	36	12	43	1	45	58	21	50	31
14	0	34	30	7	6	41	44	1	48	25	22	21	0
15	0	36	58	7	37	9	45	1	50	53	22	51	28
16	0	39	25	8	7	38	46	1	53	21	23	21	57
17	0	41	53	8	38	7	47	1	55	49	23	52	25
18	0	44	21	9	8	35	48	1	58	17	24	22	54
19	0	46	49	9	39	4	49	2	0	44	24	53	22
20	0	49	17	10	9	32	50	2	3	12	25	23	51
21	0	51	45	10	40	1	51	2	5	40	25	54	19
22	0	54	13	11	10	29	52	2	8	8	26	24	48
23	0	56	40	11	40	58	53	2	10	36	26	55	17
24	0	59	8	12	11	26	54	2	13	3	27	25	46
25	1	1	36	12	41	55	55	2	15	31	27	56	14
26	1	4	4	13	12	24	56	2	17	59	28	26	43
27	1	6	32	13	42	52	57	2	20	27	28	57	11
28	1	9	0	14	13	21	58	2	22	55	29	27	40
29	1	11	27	14	43	50	59	2	25	23	29	58	8
30	1	13	55	15	14	19	60	2	27	51	30	28	37

Æquatio Solis elliptica.

Argum. *Anomalia media Solis.*

Gradus.	o Sign. æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	I. Sign. æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	II. Sign. æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	
0	0° 0′ 0″	0′ 0″	101676	0° 56′ 35″	28′ 24″	101458	1° 38′ 45″	49′ 29″	100859	30
1	0 1 58	0 59	101676	0 58 18	29 15	101444	1 39 46	49 59	100834	29
2	0 3 56	1 59	101675	1 0 0	30 6	101429	1 40 46	50 29	100808	28
3	0 5 54	2 58	101674	1 1 41	30 57	101414	1 41 43	50 57	100783	27
4	0 7 52	3 57	101672	1 3 20	31 47	101398	1 42 38	51 25	100757	26
5	0 9 50	4 56	101670	1 4 59	32 36	101382	1 43 31	51 51	100731	25
6	0 11 47	5 55	101667	1 6 36	33 25	101365	1 44 23	52 17	100705	24
7	0 13 45	6 54	101664	1 8 12	34 13	101348	1 45 13	52 42	100679	23
8	0 15 43	7 53	101660	1 9 48	35 1	101331	1 46 1	53 6	100652	22
9	0 17 40	8 52	101656	1 11 22	35 48	101313	1 46 47	53 28	100625	21
10	0 19 37	9 50	101651	1 12 55	36 34	101295	1 47 31	53 50	100598	20
11	0 21 33	10 49	101646	1 14 26	37 20	101277	1 48 13	54 11	100571	19
12	0 23 29	11 47	101640	1 15 56	38 5	101258	1 48 53	54 31	100543	18
13	0 25 24	12 45	101634	1 17 25	38 49	101239	1 49 31	54 50	100515	17
14	0 27 20	13 43	101628	1 18 52	39 33	101219	1 50 8	55 8	100488	16
15	0 29 14	14 40	101621	1 20 18	40 16	101199	1 50 42	55 25	100460	15
16	0 31 8	15 38	101613	1 21 42	40 58	101179	1 51 15	55 31	100432	14
17	0 33 1	16 35	101605	1 23 5	41 39	101158	1 51 45	55 56	100404	13
18	0 34 55	17 32	101597	1 24 27	42 20	101137	1 52 14	56 10	100375	12
19	0 36 47	18 28	101588	1 25 47	43 0	101115	1 52 40	56 23	100347	11
20	0 38 39	19 25	101578	1 27 6	43 40	101093	1 53 4	56 35	100318	10
21	0 40 30	20 20	101568	1 28 23	44 19	101071	1 53 27	56 46	100289	9
22	0 42 21	21 16	101558	1 29 39	44 57	101049	1 53 47	56 56	100261	8
23	0 44 11	22 11	101547	1 30 53	45 34	101026	1 54 5	57 5	100232	7
24	0 46 0	23 5	101536	1 32 6	46 10	101003	1 54 21	57 12	100203	6
25	0 47 48	23 59	101524	1 33 17	46 45	100980	1 54 35	57 19	100174	5
26	0 49 35	24 53	101512	1 34 26	47 20	100956	1 54 47	57 25	100145	4
27	0 51 21	25 46	101499	1 35 33	47 53	100932	1 54 57	57 30	100116	3
28	0 53 7	26 39	101486	1 36 39	48 26	100908	1 55 5	57 33	100087	2
29	0 54 51	27 31	101472	1 37 43	48 58	100883	1 55 11	57 35	100057	1
30	0 56 35	28 24	101458	1 38 45	49 29	100859	1 55 14	57 37	100028	0
	adde æqu. centri.	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri.	adde æq. anom.	Dist. ☉ à ♁	Gradus.
	XI. Sign.			X. Sign.			IX. Sign.			

Æquatio Solis elliptica.

Argum. *Anomalia media Solis.*

Gradus	III. Sign.			IV. Sign.			V. Sign.			
	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	
0	1° 55′ 14″	57′ 37″	100028	1° 40′ 51″	50′ 20″	99183	58′ 41″	29′ 14″	98556	30
1	1 55 15	57 37	99990	1 39 51	49 50	99158	56 55	28 21	98541	29
2	1 55 15	57 37	99969	1 38 49	49 19	99132	55 8	27 28	98527	28
3	1 55 13	57 36	99940	1 37 46	48 47	99107	53 20	26 34	98513	27
4	1 55 7	57 33	99911	1 36 40	48 14	99082	51 30	25 39	98499	26
5	1 55 0	57 29	99832	1 35 33	47 40	99058	49 39	24 44	98486	25
6	1 54 51	57 24	99853	1 34 23	47 5	99034	47 48	23 48	98474	24
7	1 54 40	57 18	99824	1 33 12	46 30	99010	45 55	22 52	98462	23
8	1 54 26	57 11	99794	1 31 59	45 53	98986	44 1	21 56	98450	22
9	1 54 11	57 3	99765	1 30 45	45 16	98963	42 7	20 59	98439	21
10	1 53 54	56 55	99736	1 29 29	44 38	98940	40 12	20 2	98428	20
11	1 53 35	56 45	99707	1 28 11	43 59	98917	38 16	19 4	98418	19
12	1 53 13	56 33	99678	1 26 51	43 18	98894	36 20	18 6	98409	18
13	1 52 49	56 21	99650	1 25 30	42 37	98872	34 23	17 7	93400	17
14	1 52 23	56 8	99621	1 24 7	41 56	98850	32 26	16 9	98391	16
15	1 51 55	55 54	99593	1 22 42	41 13	98829	30 27	15 10	98383	15
16	1 51 25	55 39	99564	1 21 16	40 30	98808	28 28	14 11	98375	14
17	1 50 53	55 23	99536	1 19 49	39 46	98788	26 28	13 11	98368	13
18	1 50 19	55 5	99508	1 18 20	39 2	98768	24 28	12 11	98362	12
19	1 49 43	54 47	99480	1 16 49	38 17	98748	22 27	11 11	98356	11
20	1 49 4	54 27	99452	1 15 17	37 31	98728	20 26	10 10	98350	10
21	1 48 24	54 7	99424	1 13 44	36 44	98709	18 24	9 10	98345	9
22	1 47 41	53 46	99397	1 12 8	35 57	98690	16 22	8 9	98341	8
23	1 46 57	53 24	99369	1 10 32	35 9	98672	14 20	7 8	98337	7
24	1 46 11	53 0	99342	1 8 54	34 20	98654	12 18	6 7	98333	6
25	1 45 23	52 36	99315	1 7 15	33 30	98637	10 15	5 6	98330	5
26	1 44 32	52 10	99288	1 5 35	32 40	98619	8 12	4 5	98328	4
27	1 43 39	51 44	99262	1 3 53	31 49	98603	6 9	3 4	98326	3
28	1 42 45	51 17	99235	1 2 10	30 58	98587	4 6	2 2	98325	2
29	1 41 49	50 49	99209	1 0 26	30 6	98571	2 3	1 1	98324	1
30	1 40 51	50 20	99183	0 58 41	29 14	98556	0 0	0 0	98324	0
	adde æqu. centri.	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	Gradus
	VIII. Sign.			VII. Sign.			VI. Sign.			

Æquatio Solis Lunaris.

Argum. *Distantia Solis à Luna.*

Gr.	o Sign.		I Sign.		II Sign.		III Sign.		IV Sign.		V Sign.		
	Long. Adde	Dist. à ☊ Adde	Long. Adde	Dist. à ☊ Adde	Long. Adde	Dist. à ☊ Adde.	Long. Adde	Dist. à ☊ Subtr.	Long. Adde	Dist. à ☊ Subtr.	Long. Adde	Dist. à ☊ Subtr.	
0	0″	7	7″	6	13″	3	15″	0	13″	3	7″	6	30
5	1	7	8	5	14	2	15	0	12	3	6	6	25
10	2	7	9	5	14	2	15	1	11	4	5	6	20
15	3	7	10	4	15	1	15	1	10	4	3	7	15
20	5	6	11	4	15	1	14	2	9	5	2	7	10
25	6	6	12	3	15	0	14	2	8	5	1	7	5
30	7	6	13	3	15	0	13	3	7	6	0	7	0
	Subt. Long.	adde Dist. à ☊	Subt. Long.	adde Dist. à ☊	Subt. Long.	adde Dist. à ☊	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☊	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☊	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☊	Grad.
	XI Sign.		X Sign.		IX Sign.		VIII Sign.		VII Sign.		VI Sign.		

Tabula mediorum Lunæ motuum

pro tempore currente ſtyli veteris in meridiano Londinenſium.

Anni Chr. curr.	Longit. med. ☽ s. ° ′ ″	Anomal. med. s. ° ′ ″	Loc. med. ☊ s. ° ′ ″	Anni	Mot. longit. ☽ s. ° ′ ″	Mot. anomaliæ s. ° ′ ″	Mot. nodi. s. ° ′ ″
1	4 2 4 25	6 20 9 10	8 28 37 35	1	4. 9.23. 3	2.28.43.13	0.19.19.43
101	2 9 54 50	1 8 48 20	4 14 26 20	2	8.18.46. 7	5.27.26.25	1. 8.39.26
201	0 17 45 15	2 27 27 30	0 0 15 5	3	0.28. 9.10	8.26. 9.36	1.27.59. 9
301	10 25 35 40	2 16 6 40	7 16 3 50	B. 4	5.20.42.49	0. 7.56.45	2.17.22. 3
401	9 3 26 5	9 4 45 50	3 1 52 35	5	10. 0. 5.52	3. 6.39.57	3. 6.41.46
501	7 11 16 30	3 23 25 0	10 27 41 20	6	2. 9.28.55	6. 5.23. 9	3.26. 1.29
601	5 19 6 55	10 12 4 10	6 3 30 5	7	6.18.51.59	9. 4. 6.21	4.15.21.12
701	3 26 57 20	5 0 43 20	1 19 18 50	B. 8	11.11.25.37	0.15.53.30	5. 4.44. 5
801	2 4 47 45	11 19 22 30	9 5 7 35	9	3.20.48.41	3.14.36.42	5.24. 3.49
901	0 12 38 10	6 8 1 40	4 20 56 20	10	8. 0.11.44	6.13.19.54	6.13.23.12
1001	10 20 28 35	0 26 40 50	0 6 45 5	11	0. 9.24.48	9.12. 3. 6	7. 2.43.16
1101	8 28 19 0	7 15 20 0	7 22 33 50	B. 12	5. 2. 8.27	0.23.50.17	7.22. 6. 9
1201	7 6 9 25	2 3 50 10	3 8 22 35	13	9.11.31.30	3.22.33.29	8.11.25.52
1301	5 13 59 50	8 22 38 20	10 24 11 20	14	1.20.54.34	6.21.16.41	9. 0.45.35
1401	3 21 50 15	3 11 17 30	6 10 0 5	15	6. 0.17.37	9.19.59.53	9.20. 5.18
1501	1 29 40 40	9 29 56 40	1 25 48 50	B. 16	10.22.51.16	1. 1.47. 3	10. 9.28.12
1601	0 7 31 5	4 18 35 50	9 11 37 35	17	3. 2.14.19	4. 0.30.15	10.28.47.56
1701	10 15 21 30	11 7 15 0	4 27 26 20	18	7.11.37.22	6.29.13.27	11.13. 7.39
1721	2 28 55 35	0 16 58 50	4 0 36 5	19	11.21. 0.26	9.27.56.39	0. 7.27.22
1741	7 12 29 40	1 26 42 40	3 3 45 50	B. 20	4.13.34. 5	1. 9.43.50	0.16.50.15
1742	11 21 52 43	4 25 25 53	2 14 26 7	40	8.26. 8.10	2.19.27.40	1.23.40.31
1743	4 1 15 46	7 24 9 6	1 25 6 24	60	1.10.42.15	3.29.11.30	2.20.30.46
1744	8 10 38 49	10 22 52 19	1 5 46 41	80	5.24.16.20	5. 8.55.20	3.17.21. 1
1745	1 3 12 28	2 4 39 26	0 16 23 47	100	10. 7.50.25	6.18.39.10	5.14.11.15
1746	5 12 35 31	5 3 22 39	11 27 4 4	200	8.15.40.50	1. 7.18.20	8.28.22.30
1747	9 21 58 35	8 2 5 52	11 7 44 21	300	6.23.31.15	7.25.57.30	1.12.33.45
1748	2 1 21 38	11 0 49 5	10 18 24 38	400	5. 1.21.40	2.24.36.40	5.26.45. 0
1749	6 23 55 16	2 12 36 12	9 29 1 44	500	3. 9.12. 5	9. 3.15.50	10.10.56.15
1750	11 3 18 20	5 11 19 25	9 9 42 1	600	1.17. 2.30	3.21.55. 0	2.25. 7.30
1751	3 12 41 24	8 10 2 38	8 20 22 18	700	11.24.52.55	10.10.34.10	7. 9.18.45
1752	7 22 4 27	11 8 45 48	8 1 2 35	800	10. 2.43.20	4.29.13.20	11.23.30. 0
1753	0 14 38 5	2 20 32 57	7 11 39 41	900	8.10.33.45	11.17.52.30	4. 7.41.15
1761	11 26 3 45	3 6 26 20	2 6 55 35	1000	6.18.24.10	6. 6.31.40	8.21.52.30
1781	4 9 37 50	4 16 10 20	1 10 5 20	2000	1. 6.48.20	0.13. 3.20	5.13.45. 0
1081	8 23 11 55	5 29 54 10	0 13 15 5	3000	7.25.12.30	6.19.35. 0	2. 5.37.30
1901	7 1 2 20	0 14 33 20	7 29 3 50	4000	2.13.36.40	0.26. 6.40	10.27.30. 0

Tabula mediorum Lunæ motuum.

Menses.	Motus long. Lunæ. s.	°	′	″	Motus anomaliæ. s.	°	′	″	Motus nodi. °	′	″
Januarius	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Februarius	1	18	28	6	1	15	0	53	1	38	30
Martius	1	27	24	26	1	20	50	2	3	7	27
Aprilis	3	15	52	32	3	5	50	56	4	45	58
Majus	4	21	10	3	4	7	47	54	6	21	17
Junius	6	9	38	8	5	22	48	48	7	59	46
Julius	7	14	55	39	6	24	45	45	9	35	6
Auguftus	9	3	23	44	8	9	46	39	11	13	36
Septembr.	10	21	51	50	9	24	47	30	12	52	5
Octobr.	11	27	9	20	10	26	44	28	14	27	24
Novembr.	1	15	37	26	0	11	45	22	16	5	54
Decembr.	2	20	54	57	1	13	42	21	17	41	14

Tabula mediorum Lunæ motuum.

	Motus long. lunæ	Motus anomaliæ	Motus nodi.		Motus long. lunæ	Motus anomaliæ.	Mot. nodi.		Motus long. lunæ	Motus anom.	Mot. nodi.
Dies	s. o. ' ''	s. o. ' ''	o ' ''	H.	o ' ''	o ' ''	' ''	H.	o ' ''	o ' ''	' ''
1	0.13.10.35	0.13. 3.54	0. 3.11	'	' '' '''	' '' '''	'' '''	'	' '' '''	' '' '''	'' '''
2	0.26.21.10	0.26. 7.48	0. 6.21	''	'' ''' IV	'' ''' IV	''' IV	''	'' ''' IV	'' ''' IV	''' IV
3	1. 9.31.45	1. 9.11.42	0. 9.32	1	0.32.56	0.32.40	0. 8	31	17. 1.10	16.52.32	4. 6
4	1.22.42.20	1.22.15.36	0.12.43	2	1. 5.53	1. 5.20	0.16	32	17.34. 7	17.25.13	4.14
5	2. 5.52.55	2. 5.19.30	0.15.53	3	1.38.49	1.37.59	0.24	33	18. 7. 3	17.57.52	4.22
6	2.19. 3.30	2.18.23.24	0.19. 4	4	2.11.46	2.10.39	0.32	34	18.39.59	18.30.31	4.30
7	3. 2.14. 5	3. 1.27.18	0.22.14	5	2.44.42	2.43.18	0.40	35	19.12.55	19. 3.11	4.38
8	3.15.24.40	3.14.31.12	0.25.25	6	3.17.39	3.15.59	0.48	36	19.45.52	19.35.50	4.46
9	3.28.35.15	3.27.35. 6	0.28.36	7	3.50.35	3.48.38	0.56	37	20.18.48	20. 8.31	4.54
10	4.11.45.50	4.10.39. 0	0.31.46	8	4.23.32	4.21.18	1. 4	38	20.51.45	20.41. 9	5. 2
11	4.24.56.25	4.23.42.53	0.34.57	9	4.56.28	4.53.58	1.12	39	21.24.41	21.13.49	5.10
12	5. 8. 7. 0	5. 6.46.47	0.38. 8	10	5.29.25	5.26.38	1.19	40	21.57.38	21.46.30	5.18
13	5.21.17.35	5.19.50.41	0.41.18	11	6. 2.21	5.59.17	1.27	41	22.30.34	22.19. 9	5.26
14	6. 4.28.10	6. 2.54.35	0.44.29	12	6.35.18	6.31.57	1.35	42	23. 3.31	22.51.49	5.34
15	6.17.38.45	6.15.58.29	0.47.40	13	7. 8.14	7. 4.37	1.43	43	23.36.27	23.24.28	5.42
16	7. 0.49.20	6.29. 2.23	0.50.50	14	7.41.10	7.37.16	1.51	44	24. 9.24	23.57. 8	5.50
17	7.13.59.55	7.12. 6.17	0.54. 1	15	8.14. 7	8. 9.56	1.59	45	24.42.20	24.29.48	5.58
18	7.27.10.30	7.25.10.11	0.57.11	16	8.47. 3	8.42.36	2. 7	46	25.15.17	25. 2.29	6. 6
19	8.10.21. 5	8. 8.14. 5	1. 0.22	17	9.20. 0	9.15.16	2.15	47	25.48.13	25.35. 7	6.14
20	8.23.31.40	8.21.17.59	1. 3.33	18	9.52.56	9.47.55	2.23	48	26.21.10	26. 7.48	6.22
21	9. 6.42.15	9. 4.21.53	1. 6.43	19	10.25.53	10.20.35	2.31	49	26.54. 6	26.40.27	6.30
22	9.19.52.50	9.17.25.47	1. 9.54	20	10.58.49	10.53.15	2.39	50	27.27. 3	27.13. 7	6.38
23	10. 3. 3.25	10. 0.29.41	1.13. 5	21	11.31.46	11.25.55	2.47	51	27.59.59	27.45.46	6.46
24	10.16.14. 0	10.13.33.35	1.16.15	22	12. 4.42	11.58.34	2.55	52	28.32.56	28.18.26	6.54
25	10.29.24.35	10.26.37.29	1.19.26	23	12.37.39	12.31.15	3. 3	53	29. 5.52	28.51. 6	7. 1
26	11.12.35.10	11. 9.41.23	1.22.37	24	13.10.35	13. 3.54	3.11	54	29.38.49	29.23.47	7. 8
27	11.25.45.45	11.22.45.17	1.25.47	25	13.43.32	13.36.34	3.19	55	30.11.45	29.56.26	7.16
28	0. 8.56.20	0. 5.49.11	1.28.58	26	14.16.28	14. 9.13	3.27	56	30.44.42	30.29. 6	7.24
29	0.22. 6.55	0.18.53. 5	1.32. 9	27	14.49.25	14.41.54	3.34	57	31.17.38	31. 1.45	7.32
30	1. 5.17.31	1. 1.56.59	1.35.19	28	15.22.21	15.14.33	3.42	58	31.50.34	31.34.24	7.40
31	1.18.28. 6	1.15. 0.53	1.38.30	29	15.55.17	15.47.12	3.50	59	32.23.31	32. 7. 5	7.48
32	2. 1.38.41	1.28. 4.47	1.41.41	30	16.28.14	16.19.52	3.58	60	32.56.27	32.39.44	7.56

I. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Gradus.	o Sign.		I. Sign.		II. Sign.		III. Sign.		IV. Sign.		V. Sign.		
	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″		
0	0. 0. 0	6. 4	2 55 19	5 23	5 10 52	3 24	6 11 9	0 24	5 33 3	3 3	3 17.37	5 53	30
1	0. 6. 4	6. 4	3 0 42	5 20	5 14 16	3 18	6 11 33	0 16	5 30 0	3 9	3 11.44	5 56	29
2	0.12. 8	6. 4	3 6 2	5 17	5 17 34	3 13	6 11 49	0 10	5 26 51	3 16	2 5.48	6 0	28
3	0.18.12	6. 3	3 11 19	5 14	5 20 47	3 8	6 11 59	0 3	5 23 35	3 23	2 59.48	6 6	27
4	0.24.15	6. 4	3 16 33	5 11	5 23 55	3 3	6 12 2	0 4	5 20 12	3 29	2 53.42	6 8	26
5	0.30.19	6. 4	3 21 44	5 8	5 26 58	2 57	6 11 58	0 10	5 16 43	3 36	2 47.34	6 12	25
6	0.36.23	6. 2	3 26 52	5 4	5 29 55	2 52	6 11 48	0 18	5 13 7	3 41	2 41.26	6 12	24
7	0.42.25	6. 1	3 31 56	5 2	5 32 47	2 46	6 11 30	0 24	5 9 26	3 48	2 35. 6	6 20	23
8	0.48.26	6. 1	3 36 58	4 58	5 35 33	2 41	6 11 6	0 31	5 5 38	3 54	2 28.46	6 22	22
9	0.54.27	6. 0	3 41 56	4 56	5 38 14	2 35	6 10 35	0 38	5 1 44	4 1	2 22.24	6 26	21
10	1. 0.27	5.59	3 46 52	4 50	5 40 49	2 29	6 9 57	0 45	4 57 43	4 7	2 15.58	6 29	20
11	1. 6.26	5.58	3 51 42	4 46	5 43 18	2 24	6 9 12	0 52	4 53 36	4 13	2 9.29	6 32	19
12	1.12.24	5.59	3 56 28	4 43	5 45 42	2 18	6 8 20	0 58	4 49 23	4 19	2 2.57	6 35	18
13	1.18.23	5.56	4 1 11	4 39	5 48 0	2 11	6 7 22	1 6	4 45 4	4 25	1 56.22	6 37	17
14	1.24.19	5.53	4 5 50	4 38	5 50 11	2 6	6 6 16	1 12	4 40 39	4 30	1 49.45	6 39	16
15	1.30.12	5.53	4 10 28	4 32	5 52 17	1 59	6 5 4	1 20	4 36 9	4 38	1 43. 6	6 42	15
16	1.36. 5	5.53	4 15 0	4 28	5 54 16	1 54	6 3 44	1 27	4 31 31	4 43	1 36.24	6 44	14
17	1.41.58	5.50	4 19 28	4 24	5 56 10	1 47	6 2 17	1 33	4 26 48	4 48	1 29.40	6 47	13
18	1.47.48	5.49	4 23 52	4 20	5 57 57	1 41	6 0 44	1 41	4 22 0	4 53	1 22.53	6 47	12
19	1.53.37	5.48	4 28 12	4 16	5 59 38	1 35	5 59 3	1 47	4 17 7	4 58	1 16. 6	6 50	11
20	1.59.25	5.44	4 32 28	4 11	6 1 13	1 29	5 57 16	1 55	4 12 9	5 5	1 9.16	6 50	10
21	2. 5. 9	5.44	4 36 39	4 6	6 2 42	1 22	5 55 21	2 1	4 7 4	5 10	1 2.26	6 53	9
22	2.10.53	5.41	4 40 45	4 2	6 4 4	1 17	5 53 20	2 9	4 1 54	5 15	0 55.33	6 53	8
23	2.16 34	5.37	4 44 47	3 57	6 5 21	1 9	5 51 11	2 15	3 56 39	5 20	0 48.40	6 55	7
24	2.22.11	5.39	4 48 44	3 54	6 6 30	1 2	5 48 56	2 22	3 51 19	5 25	0 41.45	6 57	6
25	2.27.50	5.35	4 52 38	3 49	6 7 32	0 57	5 46 34	2 29	3 45 54	5 30	0 34.48	6 57	5
26	2.33.25	5.33	4 56 27	3 43	6 8 29	0 49	5 44 5	2 35	3 40 24	5 35	0 27.51	6 57	4
27	2.38.58	5.29	5 0 10	3 39	6 9 18	0 44	5 41 30	2 42	3 34 49	5 39	0 20.54	6 58	3
28	2.44.27	5.27	5 3 49	3 34	6 10 2	0 37	5 38 48	2 49	3 29 10	5 44	0 13.56	6 58	2
29	2.49.54	5.25	5 7 23	3 29	6 10 39	0 30	5 35 59	2 56	3 23 26	5 49	0 6.58	6 58	1
30	2.55.19		5 10 52		6 11 9		5 33 3		3 17 37		0 0. 0		0
	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Gradus.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		

Pro anomalia excentrica Lunæ.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Grad.	0 Sign. Subtr.	I. Sign. Subtr.	II. Sign. Subtr.	III. Sign. Subtr.	IV. Sign. Subtr.	V. Sign. Subtr.	
0	0° 0′ 0″	1° 27′ 56″	2° 35′ 13″	3° 4′ 5″	2° 44′ 1″	1° 36′ 46″	30
1	0 3 3	1 30 37	2 36 53	3 4 14	2 42 28	1 33 53	29
2	0 6 6	1 33 16	2 38 31	3 4 20	2 40 53	1 30 58	28
3	0 9 9	1 35 55	2 40 4	3 4 22	2 39 4	1 28 1	27
4	0 12 11	1 38 32	2 41 37	3 4 21	2 37 33	1 25 2	26
5	0 15 14	1 41 8	2 43 6	3 4 17	2 35 49	1 22 1	25
6	0 18 16	1 43 41	2 44 32	3 4 9	2 34 0	1 18 57	24
7	0 21 18	1 46 13	2 45 55	3 3 58	2 32 9	1 15 53	23
8	0 24 19	1 48 43	2 47 17	3 3 43	2 30 15	1 12 47	22
9	0 27 21	1 51 11	2 48 34	3 3 25	2 28 18	1 9 39	21
10	0 30 22	1 53 37	2 49 49	3 3 3	2 26 8	1 6 30	20
11	0 33 22	1 56 3	2 51 1	3 2 38	2 24 14	1 3 19	19
12	0 36 22	1 58 26	2 52 10	3 2 10	2 22 8	1 0 7	18
13	0 39 21	2 0 47	2 53 16	3 1 38	2 20 0	0 56 54	17
14	0 42 19	2 3 6	2 54 20	3 1 3	2 17 48	0 53 39	16
15	0 45 17	2 5 22	2 55 20	3 0 25	2 15 33	0 50 23	15
16	0 48 13	2 7 37	2 56 17	2 59 43	2 13 16	0 47 7	14
17	0 51 10	2 9 50	2 57 10	2 58 57	2 10 56	0 43 49	13
18	0 54 7	2 12 1	2 58 2	2 58 8	2 8 33	0 40 31	12
19	0 57 2	2 14 10	2 58 52	2 57 17	2 6 7	0 37 12	11
20	0 59 56	2 16 17	2 59 35	2 56 21	2 3 39	0 33 52	10
21	1 2 49	2 18 21	3 0 17	2 55 22	2 1 9	0 30 31	9
22	1 5 42	2 20 23	3 0 56	2 54 19	1 58 36	0 27 8	8
23	1 8 33	2 22 22	3 1 30	2 53 14	1 56 0	0 23 46	7
24	1 11 22	2 24 19	3 2 2	2 52 5	1 53 23	0 20 23	6
25	1 14 12	2 26 15	3 2 32	2 50 53	1 50 42	0 17 0	5
26	1 16 59	2 28 7	3 2 57	2 49 36	1 47 59	0 13 36	4
27	1 19 45	2 29 57	3 3 18	2 48 18	1 45 15	0 10 12	3
28	1 22 31	2 31 46	3 3 37	2 46 56	1 42 27	0 6 48	2
29	1 25 14	2 33 31	3 3 53	2 45 30	1 39 38	0 3 24	1
30	1 27 56	2 35 13	3 4 5	2 44 1	1 36 46	0 0 0	0
	Adde XI. Sign.	Adde X. Sign.	Adde IX. Sign.	Adde VIII. Sign	Adde VII. Sign.	Adde VI. Sign.	Grad.

II. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Anomalia excentrica Solis.*

Grad.	o Sign. Adde	diff.	I. Sign. Adde	diff.	II. Sign. Adde	diff.	III Sign. Adde	diff.	IV Sign. Adde	diff.	V. Sign. Adde	diff.	
0	0′ 0″		4′ 52″		8′ 26″		9′ 44″		8′ 26″		4′ 52″		30
1	0 11	11″	5 2	10″	8 31	5″	9 44	0″	8 20	6″	4 43	9″	29
2	0 20	9	5 10	8	8 36	5	9 43	1	8 15	5	4 34	9	28
3	0 31	11	5 19	9	8 41	5	9 43	0	8 9	6	4 25	9	27
4	0 41	10	5 27	8	8 45	4	9 42	1	8 3	6	4 16	9	26
5	0 51	10	5 36	9	8 50	5	9 42	0	7 58	5	4 6	10	25
6	1 1	10	5 44	8	8 53	3	9 40	2	7 52	6	3 57	9	24
7	1 11	10	5 52	8	8 58	5	9 39	1	7 46	6	3 48	9	23
8	1 22	11	6 1	9	9 2	4	9 38	1	7 40	6	3 38	10	22
9	1 31	9	6 8	7	9 6	4	9 37	1	7 33	7	3 29	9	21
10	1 41	10	6 16	8	9 9	3	9 36	1	7 27	6	3 19	10	20
11	1 52	11	6 24	8	9 12	3	9 34	2	7 21	6	3 9	10	19
12	2 2	10	6 32	8	9 16	4	9 32	2	7 15	6	3 0	9	18
13	2 11	9	6 39	7	9 19	3	9 30	2	7 8	7	2 51	9	17
14	2 21	10	6 46	7	9 22	3	9 27	3	7 0	8	2 41	10	16
15	2 31	10	6 53	7	9 24	2	9 24	3	6 53	7	2 31	10	15
16	2 41	10	7 0	7	9 27	3	9 22	2	6 45	7	2 21	10	14
17	2 51	10	7 8	8	9 30	3	9 19	3	6 39	7	2 11	10	13
18	3 0	9	7 15	7	9 32	2	9 16	3	6 32	7	2 2	9	12
19	3 9	9	7 21	6	9 34	2	9 12	4	6 24	8	1 52	10	11
20	3 19	10	7 27	6	9 36	2	9 9	3	6 16	8	1 41	11	10
21	3 29	10	7 33	6	9 37	1	9 6	3	6 8	8	1 31	10	9
22	3 38	9	7 40	7	9 38	1	9 2	4	6 1	7	1 22	9	8
23	3 48	10	7 46	6	9 39	1	8 58	4	5 52	9	1 11	11	7
24	3 57	9	7 52	6	9 40	1	8 53	5	5 44	8	1 1	10	6
25	4 6	9	7 58	6	9 42	2	8 50	3	5 36	8	0 51	10	5
26	4 16	10	8 3	5	9 42	0	8 45	5	5 27	9	0 41	10	4
27	4 25	9	8 9	6	9 43	1	8 41	4	5 19	8	0 31	10	3
28	4 34	9	8 15	6	9 43	0	8 36	5	5 10	9	0 20	11	2
29	4 43	9	8 20	5	9 44	1	8 31	5	5 2	8	0 11	9	1
30	4 52	9	8 26	6	9 44	0	8 26	5	4 52	10	0 0	11	0
	Subtr. XI. Sign.	diff.	Subtr. X. Sign.	diff.	Subtr. IX. Sign.	diff.	Subtr. VIII. Sign.	diff.	Subtr. VII. Sign.	diff.	Subtr. VI. Sign.	diff.	Grad.

III. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Subtrahatur longitudo Solis a longitudine Lunæ bis correcta.*

Grad.	o Sign. Adde	diff.	I. Sign. Adde	diff.	II. Sign. Adde	diff.	III. Sign. Subtr.	diff.	IV. Sign. Subtr.	diff.	V. Sign. Subtr.	diff.	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	1 10	29 5	0.34	28 34	0.39	1 59	1.14	31 56	0.35	30 57	0.39	30
1	1 10	1 11	29 39	0.31	27 55	0.40	3 13	1.13	32 31	0.31	30 18	0.41	29
2	2 21	1 9	30 10	0.30	27 15	0.43	4 26	1.12	33 2	0.29	29 37	0.44	28
3	3 30	1 11	30 40	0.27	26 32	0.43	5 38	1.13	33 31	0.28	28 53	0.45	27
4	4 41	1 10	31 7	0.25	25 49	0.48	6 51	1.13	33 59	0.24	28 8	0.49	26
5	5 51	1 9	31 32	0.22	25 1	0.48	8 4	1.12	34 23	0.22	27 19	0.49	25
6	7 0	1 8	31 54	0.20	24 13	0.51	9 16	1.10	34 45	0.19	26 30	0.52	24
7	8 8	1 8	32 14	0.18	23 22	0.51	10 26	1.10	35 4	0.17	25 38	0.53	23
8	9 16	1 7	32 22	0.15	22 31	0.55	11 36	1.11	35 21	0.14	24 45	0.56	22
9	10 23	1 7	32 47	0.13	21 36	0.56	12 47	1. 9	35 35	0.12	23 49	0.57	21
10	11 30	1 5	33 0	0.11	20 40	0.58	13 56	1. 8	35 47	0.10	22 52	0.59	20
11	12 35	1 5	33 11	0. 8	19 42	0.59	15 4	1. 6	35 57	0. 8	21 53	0.59	19
12	13 40	1 4	33 19	0. 5	18 43	1. 1	16 10	1. 6	36 4	0. 4	20 54	1. 2	18
13	14 44	1 1	33 24	0. 3	17 42	1. 2	17 16	1. 4	36 8	0. 2	19 52	1. 2	17
14	15 45	1 2	33 27	0. 0	16 40	1. 4	18 20	1. 4	36 10	0. 1	18 50	1. 5	16
15	16 47	1 1	33 27	0. 2	15 36	1. 4	19 24	1. 2	36 9	0. 4	17 45	1. 6	15
16	17 48	0 59	33 25	0. 5	14 32	1. 5	20 26	1. 0	36 5	0. 6	16 39	1. 6	14
17	18 47	0 58	33 20	0. 6	13 27	1. 7	21 26	1. 0	35 59	0. 8	15 33	1. 7	13
18	19 45	0 55	33 14	0.10	12 20	1. 8	22 26	0.58	35 51	0.11	14 26	1. 9	12
19	20 40	0 56	33 4	0.13	11 12	1. 9	23 24	0.56	35 40	0.14	13 17	1. 9	11
20	21 36	0 53	32 51	0.15	10 3	1.10	24 20	0.54	35 26	0.16	12 8	1.11	10
21	22 29	0 52	32 36	0.17	8 53	1.11	25 14	0.53	35 10	0.18	10 57	1.11	9
22	23 21	0 49	32 19	0.20	7 42	1.11	26 7	0.51	34 52	0.21	9 46	1.12	8
23	24 10	0 49	31 59	0.22	6 31	1.11	26 58	0.49	34 31	0.23	8 34	1.12	7
24	24 59	0 45	31 37	0 25	5 20	1.12	27 47	0.46	34 8	0.26	7 22	1.13	6
25	25 44	0 45	31 12	0.27	4 8	1.13	28 33	0.46	33 42	0.28	6 9	1.13	5
26	26 29	0 42	30 45	0.30	2 55	1.13	29 19	0.41	33 14	0.31	4 56	1.14	4
27	27 11	0 40	30 15	0.32	1 42	1.13	30 0	0.41	32 43	0.33	3 42	1.14	3
28	27 51	0 37	29 43	0.32	0 29	1.14	30 41	0.38	32 10	0.35	2 28	1.14	2
29	28 28	0 37	29 11	0.37	0 45	1.14	31 19	0.37	31 35	0.38	1 14	1.14	1
30	29 5		28 34		1 59		31 56		30 57		0 0		0
	Subtr.	diff.	Subtr.	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Grad.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. S gn.		

IV. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *A dupla distant.* ⊙ *a* ☽ *subtr. anomalia Lunæ excentrica.*

Gradus.	o Sign. Subtr.	diff.	I. Sign. Subtr.	diff.	II. Sign. Subtr.	diff.	III. Sign. Subtr.	diff.	IV. Sign. Subtr.	diff.	V. Sign. Subtr.	diff.	
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ′	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	
0	0 0 0	1 18	0 36 59	1. 6	1 4 5	0.38	1 14 0	0. 1	1 4 5	0.39	0 36 59	1. 6	30
1	0 1 18	1 16	0 38 5	1. 7	1 4 43	0.37	1 13 59	0: 2	1 3 26	0.41	0 35 53	1. 8	29
2	0 2 34	1 18	0 39 12	1. 6	1 5 20	0.35	1 13 57	0. 4	1 2 45	0.41	0 34 45	1. 9	28
3	0 3 52	1 17	0 40 18	1. 5	1 5 55	0.36	1 13 53	0. 4	1 2 4	0.44	0 33 36	1.10	27
4	0 5 9	1 18	0 41 23	1. 4	1 6 31	0.32	1 13 49	0. 6	1 1 20	0.44	0 32 26	1.10	26
5	0 6 27	1 17	0 42 27	1. 3	1 7 3	0.33	1 13 43	0. 8	1 0 36	0.45	0 31 16	1.10	25
6	0 7 44	1 17	0 43 30	1. 2	1 7 36	0.30	1 13 35	0. 9	0 59 51	0.46	0 30 6	1.11	24
7	0 9 1	1 17	0 44 32	1. 2	1 8 6	0.30	1 13 26	0.10	0 59 5	0.47	0 28 55	1.12	23
8	0 10 18	1 17	0 45 34	1. 0	1 8 36	0.28	1 13 16	0.11	0 58 18	0.48	0 27 43	1.12	22
9	0 11 35	1 16	0 46 34	1. 0	1 9 4	0.28	1 13 5	0.13	0 57 30	0.49	0 26 31	1.13	21
10	0 12 51	1 17	0 47 34	0.59	1 9 32	0.25	1 12 52	0.14	0 56 41	0.51	0 25 18	1.13	20
11	0 14 8	1 15	0 48 33	0.58	1 9 57	0.25	1 12 38	0.16	0 55 50	0.52	0 24 5	. 4	19
12	0 15 23	1 16	0 49 31	0.56	1 10 22	0.24	1 12 22	0.17	0 54 58	0.51	0 22 51	1.14	18
13	0 16 39	1 15	0 50 27	0.57	1 10 46	0.21	1 12 5	0.17	0 54 7	0.53	0 21 37	1.13	17
14	0 17 54	1 15	0 51 24	0.55	1 11 7	0.21	1 11 48	0.20	0 53 14	0.55	0 20 24	1.15	16
15	0 19 9	1 15	0 52 19	0.55	1 11 28	0.20	1 11 28	0.21	0 52 19	0.55	0 19 9	1.15	15
16	0 20 24	1 13	0 53 14	0.53	1 11 48	0.17	1 11 7	0.21	0 51 24	0.57	0 17 54	1.15	14
17	0 21 37	1 14	0 54 7	0.51	1 12 5	0.17	1 10 46	0.24	0 50 27	0.56	0 16 39	1.16	13
18	0 22 51	1 14	0 54 58	0.52	1 12 22	0.16	1 10 22	0.25	0 49 31	0.58	0 15 23	1.15	12
19	0 24 5	1 13	0 55 50	0.51	1 12 38	0.14	1 9 57	0.25	0 48 33	0.59	0 14 8	1.17	11
20	0 25 18	1 13	0 56 41	0.49	1 12 52	0.13	1 9 32	0.28	0 47 34	1. 0	0 12 51	1.16	10
21	0 26 31	1 12	0 57 30	0.48	1 13 5	0.11	1 9 4	0.28	0 46 34	1. 0	0 11 35	1.17	9
22	0 27 43	1 12	0 58 18	0.47	1 13 16	0.10	1 8 36	0.30	0 45 34	1. 2	0 10 18	1.17	8
23	0 28 55	1 11	0 59 5	0.46	1 13 26	0. 9	1 8 6	0.30	0 44 32	1. 2	0 9 1	1.17	7
24	0 30 6	1 10	59 0 51	0.45	1 13 35	0. 8	1 7 36	0.33	0 43 30	1. 3	0 7 44	1.17	6
25	0 31 16	1 10	1 0 36	0.44	1 13 43	0. 6	1 7 3	0.32	0 42 27	1. 4	0 6 27	1.18	5
26	0 32 26	1 11	1 1 20	0.44	1 13 49	0. 4	1 6 31	0.36	0 41 23	1. 5	0 5 9	1.17	4
27	0 33 36	1 9	1 2 4	0.41	1 13 53	0. 4	1 5 55	0.35	0 40 18	1. 6	0 3 52	1.18	3
28	0 34 45	1 8	1 2 45	0.41	1 13 57	0. 2	1 5 20	0.37	0 39 12	1. 7	0 2 34	1.16	2
29	0 35 53	1 6	1 3 26	0.39	1 13 59	0. 1	1 4 43	0.38	0 38 5	1. 6	0 1 18	1.18	1
30	0 36 59		1 4 5		1 14 0		1 4 5		0 36 59		0 0 0		0
	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Grad.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		

V. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *A dupla dist.* ☉ *a* ☽ *subtrahatur dupla anomalia Lunæ excentrica.*

Grad.	0 Sign. Adde		I. Sign. Adde		II. Sign. Adde		III. Sign. Adde		IV. Sign. Adde		V. Sign. Adde		
0	0′	0″	4′	12″	7′	16″	8′	24″	7′	16″	4′	12″	30
1	0	9	4	20	7	21	8	24	7	12	4	4	29
2	0	18	4	27	7	25	8	24	7	7	3	57	28
3	0	26	4	34	7	29	8	23	7	3	3	49	27
4	0	35	4	42	7	33	8	23	6	58	3	41	26
5	0	44	4	49	7	37	8	22	6	53	3	33	25
6	0	53	4	56	7	40	8	21	6	48	3	25	24
7	1	1	5	3	7	44	8	20	6	43	3	17	23
8	1	10	5	10	7	47	8	19	6	37	3	9	22
9	1	19	5	17	7	51	8	18	6	32	3	1	21
10	1	28	5	24	7	54	8	16	6	26	2	52	20
11	1	36	5	31	7	57	8	15	6	20	2	44	19
12	1	45	5	37	7	59	8	13	6	15	2	36	18
13	1	53	5	44	8	2	8	11	6	9	2	27	17
14	2	2	5	50	8	4	8	9	6	3	2	19	16
15	2	10	5	56	8	7	8	7	5	56	2	10	15
16	2	19	6	3	8	9	8	4	5	50	2	2	14
17	2	27	6	9	8	11	8	2	5	44	1	53	13
18	2	36	6	15	8	13	7	59	5	37	1	45	12
19	2	44	6	20	8	15	7	57	5	31	1	36	11
20	2	52	6	26	8	16	7	54	5	24	1	28	10
21	3	1	6	32	8	18	7	51	5	17	1	19	9
22	3	9	6	37	8	19	7	47	5	10	1	10	8
23	3	17	6	43	8	20	7	44	5	3	1	1	7
24	3	25	6	48	8	21	7	40	4	56	0	53	6
25	3	33	6	53	8	22	7	37	4	49	0	44	5
26	3	41	6	58	8	23	7	33	4	42	0	35	4
27	3	49	7	3	8	23	7	29	4	34	0	26	3
28	3	57	7	7	8	24	7	25	4	27	0	18	2
29	4	4	7	12	8	24	7	21	4	20	0	9	1
30	4	12	7	16	8	24	7	16	4	12	0	0	0
	Subtr. XI. Sign.		Subtr. X. Sign.		Subtr. IX. Sign.		Subtr. VIII. Sign.		Subtr. VII. Sign.		Subtr. VI. Sign.		Grad.

Tabula medii motus solis in diebus.

Dies.	Motus medius solis.				Motus medius anomaliæ.				Motus Apogæi	Motus Lunæ a Sole.			
	s	°	'	"	s	°	'	"	"	s	°	'	"
1	0	0	59	8	0	0	59	8	0	0	12	11	27
2	0	1	58	17	0	1	58	17	0	0	24	22	53
3	0	2	57	25	0	2	57	25	0	1	6	34	20
4	0	3	56	33	0	3	56	33	0	1	18	45	47
5	0	4	55	42	0	4	55	42	0	2	0	57	13
6	0	5	54	50	0	5	54	50	0	2	13	8	40
7	0	6	53	59	0	6	53	58	1	2	25	20	7
8	0	7	53	7	0	7	53	6	1	3	7	31	33
9	0	8	52	15	0	8	52	14	1	3	19	43	0
10	0	9	51	23	0	9	51	22	1	4	1	54	27
11	0	10	50	32	0	10	50	31	1	4	14	5	54
12	0	11	49	40	0	11	49	39	1	4	26	17	20
13	0	12	48	49	0	12	48	47	2	5	8	28	47
14	0	13	47	57	0	13	47	55	2	5	20	40	14
15	0	14	47	5	0	14	47	3	2	6	2	51	40
16	0	15	46	13	0	15	46	11	2	6	15	3	7
17	0	16	45	22	0	16	45	20	2	6	27	14	34
18	0	17	44	30	0	17	44	28	2	7	9	26	0
19	0	18	43	38	0	18	43	36	2	7	21	37	27
20	0	19	42	47	0	19	42	44	3	8	3	48	53
21	0	20	41	55	0	20	41	52	3	8	16	0	20
22	0	21	41	3	0	21	41	0	3	8	28	11	47
23	0	22	40	12	0	22	40	9	3	9	10	23	13
24	0	23	39	20	0	23	39	17	3	9	22	34	40
25	0	24	38	28	0	24	38	25	3	10	4	46	7
26	0	25	37	37	0	25	37	34	3	10	16	57	33
27	0	26	36	46	0	26	36	42	4	10	29	9	0
28	0	27	35	54	0	27	35	50	4	11	11	20	27
29	0	28	35	2	0	28	34	58	4	11	23	31	54
30	0	29	34	10	0	29	34	6	4	0	5	43	20
31	1	0	33	18	1	0	33	14	4	0	17	54	47
32	1	1	32	26	1	1	32	22	4	1	0	6	14

Tabula motus medii solis in horis & minutis.

Horæ. Minuta. Secunda.	Motus medius.			Motus Lunæ à Sole			Horæ. Minuta. Secunda	Motus medius.			Motus Lunæ à Sole		
	°	′	″	°	′	″		°	′	″	°	′	″
	′	″	‴	′	″	‴		′	″	‴	′	″	‴
	″	‴	iv	″	‴	iv		″	‴	iv	″	‴	iv
1	0	2	28	0	30	28	31	1	16	23	15	44	47
2	0	4	56	1	0	57	32	1	18	51	16	15	16
3	0	7	24	1	31	26	33	1	21	19	16	45	45
4	0	9	51	2	1	55	34	1	23	47	17	16	14
5	0	12	19	2	32	23	35	1	26	15	17	46	42
6	0	14	47	3	2	52	36	1	28	43	18	17	11
7	0	17	15	3	33	20	37	1	31	11	18	47	39
8	0	19	43	4	3	49	38	1	33	39	19	18	8
9	0	22	11	4	34	17	39	1	36	6	19	48	36
10	0	24	38	5	4	47	40	1	38	34	20	19	5
11	0	27	6	5	35	15	41	1	41	2	20	49	33
12	0	29	34	6	5	44	42	1	43	30	21	20	2
13	0	32	2	6	36	12	43	1	45	58	21	50	31
14	0	34	30	7	6	41	44	1	48	25	22	21	0
15	0	36	58	7	37	9	45	1	50	53	22	51	28
16	0	39	25	8	7	38	46	1	53	21	23	21	57
17	0	41	53	8	38	7	47	1	55	49	23	52	25
18	0	44	21	9	8	35	48	1	58	17	24	22	54
19	0	46	49	9	39	4	49	2	0	44	24	53	22
20	0	49	17	10	9	32	50	2	3	12	25	23	51
21	0	51	45	10	40	1	51	2	5	40	25	54	19
22	0	54	13	11	10	29	52	2	8	8	26	24	48
23	0	56	40	11	40	58	53	2	10	36	26	55	17
24	0	59	8	12	11	26	54	2	13	3	27	25	46
25	1	1	36	12	41	55	55	2	15	31	27	56	14
26	1	4	4	13	12	24	56	2	17	59	28	26	43
27	1	6	32	13	42	52	57	2	20	27	28	57	11
28	1	9	0	14	13	21	58	2	22	55	29	27	40
29	1	11	27	14	43	50	59	2	25	23	29	58	8
30	1	13	55	15	14	19	60	2	27	51	30	28	37

Æquatio Solis elliptica.

Argum. *Anomalia media Solis.*

Gradus.	0 Sign.			I. Sign.			II. Sign.			
	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	æqu. centri Subtr.	æqu. anom. Subtr.	Dist. ☉ à ♁	
0	0° 0′ 0″	0′ 0″	101676	0° 56′ 35″	28′ 24″	101458	1° 38′ 45″	49′ 29″	100859	30
1	0 1 58	0 59	101676	0 58 18	29 15	101444	1 39 46	49 59	100834	29
2	0 3 56	1 59	101675	1 0 0	30 6	101429	1 40 46	50 29	100808	28
3	0 5 54	2 58	101674	1 1 41	30 57	101414	1 41 43	50 57	100783	27
4	0 7 52	3 57	101672	1 3 20	31 47	101398	1 42 38	51 25	100757	26
5	0 9 50	4 56	101670	1 4 59	32 36	101382	1 43 31	51 51	100731	25
6	0 11 47	5 55	101667	1 6 36	33 25	101365	1 44 23	52 17	100705	24
7	0 13 45	6 54	101664	1 8 12	34 13	101348	1 45 13	52 42	100679	23
8	0 15 43	7 53	101660	1 9 48	35 1	101331	1 46 1	53 6	100652	22
9	0 17 40	8 52	101656	1 11 22	35 48	101313	1 46 47	53 28	100625	21
10	0 19 37	9 50	101651	1 12 55	36 34	101295	1 47 31	53 50	100598	20
11	0 21 33	10 49	101646	1 14 26	37 20	101277	1 48 13	54 11	100571	19
12	0 23 29	11 47	101640	1 15 56	38 5	101258	1 48 53	54 31	100543	18
13	0 25 24	12 45	101634	1 17 25	38 49	101239	1 49 31	54 50	100515	17
14	0 27 20	13 43	101628	1 18 52	39 33	101219	1 50 8	55 8	100488	16
15	0 29 14	14 40	101621	1 20 18	40 16	101199	1 50 42	55 25	100460	15
16	0 31 8	15 38	101613	1 21 42	40 58	101179	1 51 15	55 31	100432	14
17	0 33 1	16 35	101605	1 23 5	41 39	101158	1 51 45	55 56	100404	13
18	0 34 55	17 32	101597	1 24 27	42 20	101137	1 52 14	56 10	100375	12
19	0 36 47	18 28	101588	1 25 47	43 0	101115	1 52 40	56 23	100347	11
20	0 38 39	19 25	101578	1 27 6	43 40	101093	1 53 4	56 35	100318	10
21	0 40 30	20 20	101568	1 28 23	44 19	101071	1 53 27	56 46	100289	9
22	0 42 21	21 16	101558	1 29 39	44 57	101049	1 53 47	56 56	100261	8
23	0 44 11	22 11	101547	1 30 53	45 34	101026	1 54 5	57 5	100232	7
24	0 46 0	23 5	101536	1 32 6	46 10	101003	1 54 21	57 12	100203	6
25	0 47 48	23 59	101524	1 33 17	46 45	100980	1 54 35	57 19	100174	5
26	0 49 35	24 53	101512	1 34 26	47 20	100956	1 54 47	57 25	100145	4
27	0 51 21	25 46	101499	1 35 33	47 53	100932	1 54 57	57 30	100116	3
28	0 53 7	26 39	101486	1 36 39	48 26	100908	1 55 5	57 33	100087	2
29	0 54 51	27 31	101472	1 37 43	48 58	100883	1 55 11	57 35	100057	1
30	0 56 35	28 24	101458	1 38 45	49 29	100859	1 55 14	57 37	100028	0
	adde æqu. centri.	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri	adde æqu. anom.	Dist. ☉ à ♁	adde æqu. centri.	adde æq. anom.	Dist. ☉ à ♁	Gradus.
	XI. Sign.			X. Sign.			IX. Sign.			

Æquatio Solis elliptica.

Argum. *Anomalia media Solis.*

Gradus	III. Sign. æqu. centri Subtr.	III. Sign. æqu. anom. Subtr.	III. Sign. Dist. ☉ à ♁	IV. Sign. æqu. centri Subtr.	IV. Sign. æqu. anom. Subtr.	IV. Sign. Dist. ☉ à ♁	V. Sign. æqu. centri Subtr.	V. Sign. æqu. anom. Subtr.	V. Sign. Dist. ☉ à ♁	
0	1° 55′ 14″	57′ 37″	100028	1° 40′ 51″	50′ 20″	99183	58′ 41″	29′ 14″	98556	30
1	1 55 15	57 37	99990	1 39 51	49 50	99158	56 55	28 21	98541	29
2	1 55 15	57 37	99969	1 38 49	49 19	99132	55 8	27 28	98527	28
3	1 55 13	57 36	99940	1 37 46	48 47	99107	53 20	26 34	98513	27
4	1 55 7	57 33	99911	1 36 40	48 14	99082	51 30	25 39	98499	26
5	1 55 0	57 29	99832	1 35 33	47 40	99058	49 39	24 44	98486	25
6	1 54 51	57 24	99853	1 34 23	47 5	99034	47 48	23 48	98474	24
7	1 54 40	57 18	99824	1 33 12	46 30	99010	45 55	22 52	98462	23
8	1 54 26	57 11	99794	1 31 59	45 53	98986	44 1	21 56	98450	22
9	1 54 11	57 3	99765	1 30 45	45 16	98963	42 7	20 59	98439	21
10	1 53 54	56 55	99736	1 29 29	44 38	98940	40 12	20 2	98428	20
11	1 53 35	56 45	99707	1 28 11	43 59	98917	38 16	19 4	98418	19
12	1 53 13	56 33	99678	1 26 51	43 18	98894	36 20	18 6	98409	18
13	1 52 49	56 21	99650	1 25 30	42 37	98872	34 23	17 7	93400	17
14	1 52 23	56 8	99621	1 24 7	41 56	98850	32 26	16 9	98391	16
15	1 51 55	55 54	99593	1 22 42	41 13	98829	30 27	15 10	98383	15
16	1 51 25	55 39	99564	1 21 16	40 30	98808	28 28	14 11	98375	14
17	1 50 53	55 23	99536	1 19 49	39 46	98788	26 28	13 11	98368	13
18	1 50 19	55 5	99508	1 18 20	39 2	98768	24 28	12 11	98362	12
19	1 49 43	54 47	99480	1 16 49	38 17	98748	22 27	11 11	98356	11
20	1 49 4	54 27	99452	1 15 17	37 31	98728	20 26	10 10	98350	10
21	1 48 24	54 7	99424	1 13 44	36 44	98709	18 24	9 10	98345	9
22	1 47 41	53 46	99397	1 12 8	35 57	98690	16 22	8 9	98341	8
23	1 46 57	53 24	99369	1 10 32	35 9	98672	14 20	7 8	98337	7
24	1 46 11	53 0	99342	1 8 54	34 20	98654	12 18	6 7	98333	6
25	1 45 23	52 36	99315	1 7 15	33 30	98637	10 15	5 6	98330	5
26	1 44 32	52 10	99288	1 5 35	32 40	98619	8 12	4 5	98328	4
27	1 43 39	51 44	99262	1 3 53	31 49	98603	6 9	3 4	98326	3
28	1 42 45	51 17	99235	1 2 10	30 58	98587	4 6	2 2	98325	2
29	1 41 49	50 49	99209	1 0 26	30 6	98571	2 3	1 1	98324	1
30	1 40 51	50 20	99183	0 58 41	29 14	98556	0 0	0 0	98324	0
	adde æqu. centri. VIII. Sign.	adde æqu. anom. VIII. Sign.	Dist. ☉ à ♁ VIII. Sign.	adde æqu. centri VII. Sign.	adde æqu. anom. VII. Sign.	Dist. ☉ à ♁ VII. Sign.	adde æqu. centri VI. Sign.	adde æqu. anom. VI. Sign.	Dist. ☉ à ♁ VI. Sign.	Gradus

Æquatio Solis Lunaris.

Argum. ***Distantia Solis à Luna.***

Gr.	0 Sign. Long. Adde	0 Sign. Dist. à ☋ Adde	I Sign. Long. Adde	I Sign. Dist. à ☋ Adde	II Sign. Long. Adde	II Sign. Dist. à ☋ Adde.	III Sign. Long. Adde	III Sign. Dist. à ☋ Subtr.	IV Sign. Long. Adde	IV Sign. Dist. à ☋ Subtr.	V Sign. Long. Adde	V Sign. Dist. à ☋ Subtr.	
0	0″	7	7″	6	13″	3	15″	0	13″	3	7″	6	30
5	1	7	8	5	14	2	15	0	12	3	6	6	25
10	2	7	9	5	14	2	15	1	11	4	5	6	20
15	3	7	10	4	15	1	15	1	10	4	3	7	15
20	5	6	11	4	15	1	14	2	9	5	2	7	10
25	6	6	12	3	15	0	14	2	8	5	1	7	5
30	7	6	13	3	15	0	13	3	7	6	0	7	0
	Subt. Long.	adde Dist. à ☋	Subt. Long.	adde Dist. à ☋	Subt. Long.	adde Dist. à ☋	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☋	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☋	Subt. Long.	Subt. Dist. à ☋	Grad.
	XI Sign.		X Sign.		IX Sign.		VIII Sign.		VII Sign.		VI Sign.		

Tabula mediorum Lunæ motuum

pro tempore currente ſtyli veteris in meridiano Londinenſium.

Anni Chr. curr.	Longit. med. ☽ s. ° ' "	Anomal. med. s. ° ' "	Loc. med. ☊ s. ° ' "	Anni	Mot. longit. ☽ s. ° ' "	Mot. anomaliæ s. °. ' "	Mot. nodi. s. °. ' "
1	4 2 4 25	6 20 9 10	8 28 37 35	1	4. 9.23. 3	2.28.43.13	0.19.19.43
101	2 9 54 50	1 8 48 20	4 14 26 20	2	8.18.46. 7	5.27.26.25	1. 8.39.26
201	0 17 45 15	2 27 27 30	0 0 15 5	3	0.28. 9.10	8.26. 9.36	1.27.59. 9
301	10 25 35 40	2 16 6 40	7 16 3 50	B. 4	5.20.42.49	0. 7.56.45	2.17.22. 3
401	9 3 26 5	9 4 45 50	3 1 52 35	5	10. 0. 5.52	3. 6.39.57	3. 6.41.46
501	7 11 16 30	3 23 25 0	10 27 41 20	6	2. 9.28.55	6. 5.23. 9	3.26. 1.29
601	5 19 6 55	10 12 4 10	6 3 30 5	7	6.18.51.59	9. 4. 6.21	4.15.21.12
701	3 26 57 20	5 0 43 20	1 19 18 50	B. 8	11.11.25.37	0.15.53.30	5. 4.44. 5
801	2 4 47 45	11 19 22 30	9 5 7 35	9	3.20.48.41	3.14.36.42	5.24. 3.49
901	0 12 38 10	6 8 1 40	4 20 56 20	10	8. 0.11.44	6.13.19.54	6.13.23.12
1001	10 20 28 35	0 26 40 50	0 6 45 5	11	0. 9.24.48	9.12. 3. 6	7. 2.43.16
1101	8 28 19 0	7 15 20 0	7 22 33 50	B. 12	5. 2. 8.27	0.23.50.17	7.22. 6. 9
1201	7 6 9 25	2 3 50 10	3 8 22 35	13	9.11.31.30	3.22.33.29	8.11.25.52
1301	5 13 59 50	8 22 38 20	10 24 11 20	14	1.20.54.34	6.21.16.41	9. 0.45.35
1401	3 21 50 15	3 11 17 30	6 10 0 5	15	6. 0.17.37	9.19.59.53	9.20. 5.18
1501	1 29 40 40	9 29 56 40	1 25 48 50	B. 16	10.22.51.16	1. 1.47. 3	10. 9.28.12
1601	0 7 31 5	4 18 35 50	9 11 37 35	17	3. 2.14.19	4. 0.30.15	10.28.47.56
1701	10 15 21 30	11 7 15 0	4 27 26 20	18	7.11.37.22	6.29.13.27	11.13. 7.39
1721	2 28 55 35	0 16 58 50	4 0 36 5	19	11.21. 0.26	9.27.56.39	0. 7.27.22
1741	7 12 29 40	1 26 42 40	3 3 45 50	B. 20	4.13.34. 5	1. 9.43.50	0.16.50.15
1742	11 21 52 43	4 25 25 53	2 14 26 7	40	8.26. 8.10	2.19.27.40	1.23.40.31
1743	4 1 15 46	7 24 9 6	1 25 6 24	60	1.10.42.15	3.29.11.30	2.20.30.46
1744	8 10 38 49	10 22 52 19	1 5 46 41	80	5.24.16.20	5. 8.55.20	3.17.21. 1
1745	1 3 12 28	2 4 39 26	0 16 23 47	100	10. 7.50.25	6.18.39.10	5.14.11.15
1746	5 12 35 31	5 3 22 39	11 27 4 4	200	8.15.40.50	1. 7.18.20	8.28.22.30
1747	9 21 58 35	8 2 5 52	11 7 44 21	300	6.23.31.15	7.25.57.30	1.12.33.45
1748	2 1 21 38	11 0 49 5	10 18 24 38	400	5. 1.21.40	2.24.36.40	5.26.45. 0
1749	6 23 55 16	2 12 36 12	9 29 1 44	500	3. 9.12. 5	9. 3.15.50	10.10.56.15
1750	11 3 18 20	5 11 19 25	9 9 42 1	600	1.17. 2.30	3.21.55. 0	2.25. 7.30
1751	3 12 41 24	8 10 2 38	8 20 22 18	700	11.24.52.55	10.10.34.10	7. 9.18.45
1752	7 22 4 27	11 8 45 48	8 1 2 35	800	10. 2.43.20	4.29.13.20	11.23.30. 0
1753	0 14 38 5	2 20 32 57	7 11 39 41	900	8.10.33.45	11.17.52.30	4. 7.41.15
1761	11 26 3 45	3 6 26 20	2 6 55 35	1000	6.18.24.10	6. 6.31.40	8.21.52.30
1781	4 9 37 50	4 16 10 20	1 10 5 20	2000	1. 6.48.20	0.13. 3.20	5.13.45. 0
1081	8 23 11 55	5 29 54 10	0 13 15 5	3000	7.25.12.30	6.19.35. 0	2. 5.37.30
1901	7 1 2 20	0 14 33 20	7 29 3 50	4000	2.13.36.40	0.26. 6.40	10.27.30. 0

Tabula mediorum Lunæ motuum.

Menſes.	Motus long. Lunæ.				Motus anomaliæ.				Motus nodi.		
	s.	°	′	″	s.	°	′	″	°	′	″
Januarius	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Februarius	1	18	28	6	1	15	0	53	1	38	30
Martius	1	27	24	26	1	20	50	2	3	7	27
Aprilis	3	15	52	32	3	5	50	56	4	45	58
Majus	4	21	10	3	4	7	47	54	6	21	17
Junius	6	9	38	8	5	22	48	48	7	59	46
Julius	7	14	55	39	6	24	45	45	9	35	6
Auguſtus	9	3	23	44	8	9	46	39	11	13	36
Septembr.	10	21	51	50	9	24	47	30	12	52	5
Octobr.	11	27	9	20	10	26	44	28	14	27	24
Novembr.	1	15	37	26	0	11	45	22	16	5	54
Decembr.	2	20	54	57	1	13	42	21	17	41	14

Tabula mediorum Lunæ motuum.

	Motus long. lunæ	Motus anomaliæ	Motus nodi.		Motus long. lunæ	Motus anomaliæ.	Mot. nodi.		Motus long. lunæ	Motus anom.	Mot. nodi.
Dies	s. o. ′ ″	s. o. ′ ″	o ′ ″	H.	o ′ ″	o ′ ″	′ ″	H.	o ′ ″	o ′ ″	′ ″
1	0.13.10.35	0.13. 3.54	0. 3.11	′	′ ″ ‴	′ ″ ‴	″ ‴	′	′ ″ ‴	′ ″ ‴	″ ‴
2	0.26.21.10	0.26. 7.48	0. 6.21	″	″ ‴ IV	″ ‴ IV	‴ IV	″	″ ‴ IV	″ ‴ IV	‴ IV
3	1. 9.31.45	1. 9.11.42	0. 9.32	1	0.32.56	0.32.40	0. 8	31	17. 1.10	16.52.32	4. 6
4	1.22.42.20	1.22.15.36	0.12.43	2	1. 5.53	1. 5.20	0.16	32	17.34. 7	17.25.13	4.14
5	2. 5.52.55	2. 5.19.30	0.15.53	3	1.38.49	1.37.59	0.24	33	18. 7. 3	17.57.52	4.22
6	2.19. 3.30	2.18.23.24	0.19. 4	4	2.11.46	2.10.39	0.32	34	18.39.59	18.30.31	4.30
7	3. 2.14. 5	3. 1.27.18	0.22.14	5	2.44.42	2.43.18	0.40	35	19.12.55	19. 3.11	4.38
8	3.15.24.40	3.14.31.12	0.25.25	6	3.17.39	3.15.59	0.48	36	19.45.52	19.35.50	4.46
9	3.28.35.15	3.27.35. 6	0.28.36	7	3.50.35	3.48.38	0.56	37	20.18.48	20. 8.31	4.54
10	4.11.45.50	4.10.39. 0	0.31.46	8	4.23.32	4.21.18	1. 4	38	20.51.45	20.41. 9	5. 2
11	4.24.56.25	4.23.42.53	0.34.57	9	4.56.28	4.53.58	1.12	39	21.24.41	21.13.49	5.10
12	5. 8. 7. 0	5. 6.46.47	0.38. 8	10	5.29.25	5.26.38	1.19	40	21.57.38	21.46.30	5.18
13	5.21.17.35	5.19.50.41	0.41.18	11	6. 2.21	5.59.17	1.27	41	22.30.34	22.19. 9	5.26
14	6. 4.28.10	6. 2.54.35	0.44.29	12	6.35.18	6.31.57	1.35	42	23. 3.31	22.51.49	5.34
15	6.17.38.45	6.15.58.29	0.47.40	13	7. 8.14	7. 4.37	1.43	43	23.36.27	23.24.28	5.42
16	7. 0.49.20	6.29. 2.23	0.50.50	14	7.41.10	7.37.16	1.51	44	24. 9.24	23.57. 8	5.50
17	7.13.59.55	7.12. 6.17	0.54. 1	15	8.14. 7	8. 9.56	1.59	45	24.42.20	24.29.48	5.58
18	7.27.10.30	7.25.10.11	0.57.11	16	8.47. 3	8.42.36	2. 7	46	25.15.17	25. 2.29	6. 6
19	8.10.21. 5	8. 8.14. 5	1. 0.22	17	9.20. 0	9.15.16	2.15	47	25.48.13	25.35. 7	6.14
20	8.23.31.40	8.21.17.59	1. 3.33	18	9.52.56	9.47.55	2.23	48	26.21.10	26. 7.48	6.22
21	9. 6.42.15	9. 4.21.53	1. 6.43	19	10.25.53	10.20.35	2.31	49	26.54. 6	26.40.27	6.30
22	9.19.52.50	9.17.25.47	1. 9.54	20	10.58.49	10.53.15	2.39	50	27.27. 3	27.13. 7	6.38
23	10. 3. 3.25	10. 0.29.41	1.13. 5	21	11.31.46	11.25.55	2.47	51	27.59.59	27.45.46	6.46
24	10.16.14. 0	10.13.33.35	1.16.15	22	12. 4.42	11.58.34	2.55	52	28.32.56	28.18.26	6.54
25	10.29.24.35	10.26.37.29	1.19.26	23	12.37.39	12.31.15	3. 3	53	29. 5.52	28.51. 6	7. 1
26	11.12.35.10	11. 9.41.23	1.22.37	24	13.10.35	13. 3.54	3.11	54	29.38.49	29.23.47	7. 8
27	11.25.45.45	11.22.45.17	1.25.47	25	13.43.32	13.36.34	3.19	55	30.11.45	29.56.26	7.16
28	0. 8.56.20	0. 5.49.11	1.28.58	26	14.16.28	14. 9.13	3.27	56	30.44.42	30.29. 6	7.24
29	0.22. 6.55	0.18.53. 5	1.32. 9	27	14.49.25	14.41.54	3.34	57	31.17.38	31. 1.45	7.32
30	1. 5.17.31	1. 1.56.59	1.35.19	28	15.22.21	15.14.33	3.42	58	31.50.34	31.34.24	7.40
31	1.18.28. 6	1.15. 0.53	1.38.30	29	15.55.17	15.47.12	3.50	59	32.23.31	32. 7. 5	7.48
32	2. 1.38.41	1.28. 4.47	1.41.41	30	16.28.14	16.19.52	3.58	60	32.56.27	32.39.44	7.56

I. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Gradus.	o Sign.		I. Sign.		II. Sign.		III. Sign.		IV. Sign.		V. Sign.		
	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	Loc. Lun. Subtr.	diff.	
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″		° ′ ″		° ′ ″		
0	0. 0. 0	6. 4	2 55 19	5 23	5 10 52	3 24	6 11 9	0 24	5 33 3	3 3	3 17.37	5 53	30
1	0. 6. 4	6. 4	3 0 42	5 20	5 14 16	3 18	6 11 33	0 16	5 30 0	3 9	3 11.44	5 56	29
2	0.12. 8	6. 4	3 6 2	5 17	5 17 34	3 13	6 11 49	0 10	5 26 51	3 16	2 5.48	6 0	28
3	0.18.12	6. 3	3 11 19	5 14	5 20 47	3 8	6 11 59	0 3	5 23 35	3 23	2 59.48	6 6	27
4	0.24.15	6. 4	3 16 33	5 11	5 23 55	3 3	6 12 2	0 4	5 20 12	3 29	2 53.42	6 8	26
5	0.30.19	6. 4	3 21 44	5 8	5 26 58	2 57	6 11 58	0 10	5 16 43	3 36	2 47.34	6 12	25
6	0.36.23	6. 2	3 26 52	5 4	5 29 55	2 52	6 11 48	0 18	5 13 7	3 41	2 41.26	6 12	24
7	0.42.25	6. 1	3 31 56	5 2	5 32 47	2 46	6 11 30	0 24	5 9 26	3 48	2 35. 6	6 20	23
8	0.48.26	6. 1	3 36 58	4 58	5 35 33	2 41	6 11 6	0 31	5 5 38	3 54	2 28.46	6 22	22
9	0.54.27	6. 0	3 41 56	4 56	5 38 14	2 35	6 10 35	0 38	5 1 44	4 1	2 22.24	6 26	21
10	1. 0.27	5.59	3 46 52	4 50	5 40 49	2 29	6 9 57	0 45	4 57 43	4 7	2 15.58	6 29	20
11	1. 6.26	5.58	3 51 42	4 46	5 43 18	2 24	6 9 12	0 52	4 53 36	4 13	2 9.29	6 32	19
12	1.12.24	5.59	3 56 28	4 43	5 45 42	2 18	6 8 20	0 58	4 49 23	4 19	2 2.57	6 35	18
13	1.18.23	5.56	4 1 11	4 39	5 48 0	2 11	6 7 22	1 6	4 45 4	4 25	1 56.22	6 37	17
14	1.24.19	5.53	4 5 50	4 38	5 50 11	2 6	6 6 16	1 12	4 40 39	4 30	1 49.45	6 39	16
15	1.30.12	5.53	4 10 28	4 32	5 52 17	1 59	6 5 4	1 20	4 36 9	4 38	1 43. 6	6 42	15
16	1.36. 5	5.53	4 15 0	4 28	5 54 16	1 54	6 3 44	1 27	4 31 31	4 43	1 36.24	6 44	14
17	1.41.58	5.50	4 19 28	4 24	5 56 10	1 47	6 2 17	1 33	4 26 48	4 48	1 29.40	6 47	13
18	1.47.48	5.49	4 23 52	4 20	5 57 57	1 41	6 0 44	1 41	4 22 0	4 53	1 22.53	6 47	12
19	1.53.37	5.48	4 28 12	4 16	5 59 38	1 35	5 59 3	1 47	4 17 7	4 58	1 16. 6	6 50	11
20	1.59.25	5.44	4 32 28	4 11	6 1 13	1 29	5 57 16	1 55	4 12 9	5 5	1 9.16	6 50	10
21	2. 5. 9	5.44	4 36 39	4 6	6 2 42	1 22	5 55 21	2 1	4 7 4	5 10	1 2.26	6 53	9
22	2.10.53	5.41	4 40 45	4 2	6 4 4	1 17	5 53 20	2 9	4 1 54	5 15	0 55.33	6 53	8
23	2.16.34	5.37	4 44 47	3 57	6 5 21	1 9	5 51 11	2 15	3 56 39	5 20	0 48.40	6 55	7
24	2.22.11	5.39	4 48 44	3 54	6 6 30	1 2	5 48 56	2 22	3 51 19	5 25	0 41.45	6 57	6
25	2.27.50	5.35	4 52 38	3 49	6 7 32	0 57	5 46 34	2 29	3 45 54	5 30	0 34.48	6 57	5
26	2.33.25	5.33	4 56 27	3 43	6 8 29	0 49	5 44 5	2 35	3 40 24	5 35	0 27.51	6 57	4
27	2.38.58	5.29	5 0 10	3 39	6 9 18	0 44	5 41 30	2 42	3 34 49	5 39	0 20.54	6 58	3
28	2.44.27	5.27	5 3 49	3 34	6 10 2	0 37	5 38 48	2 49	3 29 10	5 44	0 13.56	6 58	2
29	2.49.54	5.25	5 7 23	3 29	6 10 39	0 30	5 35 59	2 56	3 23 26	5 49	0 6.58	6 58	1
30	2.55.19		5 10 52		6 11 9		5 33 3		3 17 37		0 0. 0		0
	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Adde Loc. Lun.	diff.	Gradus.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		

Pro anomalia excentrica Lunæ.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Grad.	0 Sign. Subtr.	I. Sign. Subtr.	II. Sign. Subtr.	III. Sign. Subtr.	IV. Sign. Subtr.	V. Sign. Subtr.	
0	0° 0′ 0″	1° 27′ 56″	2° 35′ 13″	3° 4′ 5″	2° 44′ 1″	1° 36′ 46″	30
1	0 3 3	1 30 37	2 36 53	3 4 14	2 42 28	1 33 53	29
2	0 6 6	1 33 16	2 38 31	3 4 20	2 40 53	1 30 58	28
3	0 9 9	1 35 55	2 40 4	3 4 22	2 39 4	1 28 1	27
4	0 12 11	1 38 32	2 41 37	3 4 21	2 37 33	1 25 2	26
5	0 15 14	1 41 8	2 43 6	3 4 17	2 35 49	1 22 1	25
6	0 18 16	1 43 41	2 44 32	3 4 9	2 34 0	1 18 57	24
7	0 21 18	1 46 13	2 45 55	3 3 58	2 32 9	1 15 53	23
8	0 24 19	1 48 43	2 47 17	3 3 43	2 30 15	1 12 47	22
9	0 27 21	1 51 11	2 48 34	3 3 25	2 28 18	1 9 39	21
10	0 30 22	1 53 37	2 49 49	3 3 3	2 26 8	1 6 30	20
11	0 33 22	1 56 3	2 51 1	3 2 38	2 24 14	1 3 19	19
12	0 36 22	1 58 26	2 52 10	3 2 10	2 22 8	1 0 7	18
13	0 39 21	2 0 47	2 53 16	3 1 38	2 20 0	0 56 54	17
14	0 42 19	2 3 6	2 54 20	3 1 3	2 17 48	0 53 39	16
15	0 45 17	2 5 22	2 55 20	3 0 25	2 15 33	0 50 23	15
16	0 48 13	2 7 37	2 56 17	2 59 43	2 13 16	0 47 7	14
17	0 51 10	2 9 50	2 57 10	2 58 57	2 10 56	0 43 49	13
18	0 54 7	2 12 1	2 58 2	2 58 8	2 8 33	0 40 31	12
19	0 57 2	2 14 10	2 58 52	2 57 17	2 6 7	0 37 12	11
20	0 59 56	2 16 17	2 59 35	2 56 21	2 3 39	0 33 52	10
21	1 2 49	2 18 21	3 0 17	2 55 22	2 1 9	0 30 31	9
22	1 5 42	2 20 23	3 0 56	2 54 19	1 58 36	0 27 8	8
23	1 8 33	2 22 22	3 1 30	2 53 14	1 56 0	0 23 46	7
24	1 11 22	2 24 19	3 2 2	2 52 5	1 53 23	0 20 23	6
25	1 14 12	2 26 15	3 2 32	2 50 53	1 50 42	0 17 0	5
26	1 16 59	2 28 7	3 2 57	2 49 36	1 47 59	0 13 36	4
27	1 19 45	2 29 57	3 3 18	2 48 18	1 45 15	0 10 12	3
28	1 22 31	2 31 46	3 3 37	2 46 56	1 42 27	0 6 48	2
29	1 25 14	2 33 31	3 3 53	2 45 30	1 39 38	0 3 24	1
30	1 27 56	2 35 13	3 4 5	2 44 1	1 36 46	0 0 0	0
	Adde XI. Sign.	Adde X. Sign.	Adde IX. Sign.	Adde VIII. Sign.	Adde VII. Sign.	Adde VI. Sign.	Grad.

II. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Anomalia excentrica Solis.*

Grad.	o Sign. Adde	diff.	I. Sign. Adde	diff.	II. Sign. Adde	diff.	III Sign. Adde	diff.	IV Sign. Adde	diff.	V. Sign. Adde	diff.	
0	0' 0"	11"	4' 52"	10"	8' 26"	5"	9' 44"	0"	8' 26"	6"	4' 52"	9"	30
1	0 11	9	5 2	8	8 31	5	9 44	1	8 20	5	4 43	9	29
2	0 20	11	5 10	9	8 36	5	9 43	0	8 15	6	4 34	9	28
3	0 31	10	5 19	8	8 41	4	9 43	1	8 9	6	4 25	9	27
4	0 41	10	5 27	9	8 45	5	9 42	0	8 3	5	4 16	10	26
5	0 51	10	5 36	8	8 50	3	9 42	2	7 58	6	4 6	9	25
6	1 1	10	5 44	8	8 53	5	9 40	1	7 52	6	3 57	9	24
7	1 11	11	5 52	9	8 58	4	9 39	1	7 46	6	3 48	10	23
8	1 22	9	6 1	7	9 2	4	9 38	1	7 40	7	3 38	9	22
9	1 31	10	6 8	8	9 6	3	9 37	1	7 33	6	3 29	10	21
10	1 41	11	6 16	8	9 9	3	9 36	2	7 27	6	3 19	10	20
11	1 52	10	6 24	8	9 12	4	9 34	2	7 21	6	3 9	9	19
12	2 2	9	6 32	7	9 16	3	9 32	2	7 15	7	3 0	9	18
13	2 11	10	6 39	7	9 19	3	9 30	3	7 8	8	2 51	10	17
14	2 21	10	6 46	7	9 22	2	9 27	3	7 0	7	2 41	10	16
15	2 31	10	6 53	7	9 24	3	9 24	2	6 53	7	2 31	10	15
16	2 41	10	7 0	8	9 27	3	9 22	3	6 45	7	2 21	10	14
17	2 51	9	7 8	7	9 30	2	9 19	3	6 39	7	2 11	9	13
18	3 0	9	7 15	6	9 32	2	9 16	4	6 32	8	2 2	10	12
19	3 9	10	7 21	6	9 34	2	9 12	3	6 24	8	1 52	11	11
20	3 19	10	7 27	6	9 36	1	9 9	3	6 16	8	1 41	10	10
21	3 29	9	7 33	7	9 37	1	9 6	4	6 8	7	1 31	9	9
22	3 38	10	7 40	6	9 38	1	9 2	4	6 1	9	1 22	11	8
23	3 48	9	7 46	6	9 39	1	8 58	5	5 52	8	1 11	10	7
24	3 57	9	7 52	6	9 40	2	8 53	3	5 44	8	1 1	10	6
25	4 6	10	7 58	5	9 42	0	8 50	5	5 36	9	0 51	10	5
26	4 16	9	8 3	6	9 42	1	8 45	4	5 27	8	0 41	10	4
27	4 25	9	8 9	6	9 43	0	8 41	5	5 19	9	0 31	11	3
28	4 34	9	8 15	5	9 43	1	8 36	5	5 10	8	0 20	9	2
29	4 43	9	8 20	6	9 44	0	8 31	5	5 2	10	0 11	11	1
30	4 52		8 26		9 44		8 26		4 52		0 0		0
	Subtr. XI. Sign.	diff.	Subtr. X. Sign.	diff.	Subtr. IX. Sign.	diff.	Subtr. VIII. Sign.	diff.	Subtr. VII. Sign.	diff.	Subtr. VI. Sign.	diff.	Grad.

III. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *Subtrahatur longitudo Solis a longitudine Lunæ bis correcta.*

Grad.	o Sign. Adde	diff.	I. Sign. Adde	diff.	II. Sign. Adde	diff.	III. Sign. Subtr.	diff.	IV. Sign. Subtr.	diff.	V. Sign. Subtr.	diff.	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	1 10	29 5	0.34	28 34	0.39	1 59	1.14	31 56	0.35	30 57	0.39	30
1	1 10	1 11	29 39	0.31	27 55	0.40	3 13	1.13	32 31	0.31	30 18	0.41	29
2	2 21	1 9	30 10	0.30	27 15	0.43	4 26	1.12	33 2	0.29	29 37	0.44	28
3	3 30	1 11	30 40	0.27	26 32	0.43	5 38	1.13	33 31	0.28	28 53	0.45	27
4	4 41	1 10	31 7	0.25	25 49	0.48	6 51	1.13	33 59	0.24	28 8	0.49	26
5	5 51	1 9	31 32	0.22	25 1	0.48	8 4	1.12	34 23	0.22	27 19	0.49	25
6	7 0	1 8	31 54	0.20	24 13	0.51	9 16	1.10	34 45	0.19	26 30	0.52	24
7	8 8	1 8	32 14	0.18	23 22	0.51	10 26	1.10	35 4	0.17	25 38	0.53	23
8	9 16	1 7	32 22	0.15	22 31	0.55	11 36	1.11	35 21	0.14	24 45	0.56	22
9	10 23	1 7	32 47	0.13	21 36	0.56	12 47	1. 9	35 35	0.12	23 49	0.57	21
10	11 30	1 5	33 0	0.11	20 40	0.58	13 56	1. 8	35 47	0.10	22 52	0.59	20
11	12 35	1 5	33 11	0. 8	19 42	0.59	15 4	1. 6	35 57	0. 8	21 53	0.59	19
12	13 40	1 4	33 19	0. 5	18 43	1. 1	16 10	1. 6	36 4	0. 4	20 54	1. 2	18
13	14 44	1 1	33 24	0. 3	17 42	1. 2	17 16	1. 4	36 8	0. 2	19 52	1. 2	17
14	15 45	1 2	33 27	0. 0	16 40	1. 4	18 20	1. 4	36 10	0. 1	18 50	1. 5	16
15	16 47	1 1	33 27	0. 2	15 36	1. 4	19 24	1. 2	36 9	0. 4	17 45	1. 6	15
16	17 48	0 59	33 25	0. 5	14 32	1. 5	20 26	1. 0	36 5	0. 6	16 39	1. 6	14
17	18 47	0 58	33 20	0. 6	13 27	1. 7	21 26	1. 0	35 59	0. 8	15 33	1. 7	13
18	19 45	0 55	33 14	0.10	12 20	1. 8	22 26	0.58	35 51	0.11	14 26	1. 9	12
19	20 40	0 56	33 4	0.13	11 12	1. 9	23 24	0.56	35 40	0.14	13 17	1. 9	11
20	21 36	0 53	32 51	0.15	10 3	1.10	24 20	0.54	35 26	0.16	12 8	1.11	10
21	22 29	0 52	32 36	0.17	8 53	1.11	25 14	0.53	35 10	0.18	10 57	1.11	9
22	23 21	0 49	32 19	0.20	7 42	1.11	26 7	0.51	34 52	0.21	9 46	1.12	8
23	24 10	0 49	31 59	0.22	6 31	1.11	26 58	0.49	34 31	0.23	8 34	1.12	7
24	24 59	0 45	31 37	0.25	5 20	1.12	27 47	0.46	34 8	0.26	7 22	1.13	6
25	25 44	0 45	31 12	0.27	4 8	1.13	28 33	0.46	33 42	0.28	6 9	1.13	5
26	26 29	0 42	30 45	0.30	2 55	1.13	29 19	0.41	33 14	0.31	4 56	1.14	4
27	27 11	0 40	30 15	0.32	1 42	1.13	30 0	0.41	32 43	0.33	3 42	1.14	3
28	27 51	0 37	29 43	0.32	0 29	1.14	30 41	0.38	32 10	0.35	2 28	1.14	2
29	28 28	0 37	29 11	0.37	0 45	1.14	31 19	0.37	31 35	0.38	1 14	1.14	1
30	29 5		28 34		1 59		31 56		30 57		0 0		0
	Subtr.	diff.	Subtr.	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Grad.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		

IV. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *A dupla distant.* ⊙ *a* ☽ *subtr. anomalia Lunæ excentrica.*

Gradus.	o Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	I. Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	II. Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	III. Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	IV. Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	V. Sign. Subtr. ° ′ ″	diff. ′ ″	
0	0 0 0	1 18	0 36 59	1. 6	1 4 5	0.38	1 14 0	0. 1	1 4 5	0.39	0 36 59	1. 6	30
1	0 1 18	1 16	0 38 5	1. 7	1 4 43	0.37	1 13 59	0. 2	1 3 26	0.41	0 35 53	1. 8	29
2	0 2 34	1 18	0 39 12	1. 6	1 5 20	0.35	1 13 57	0. 4	1 2 45	0.41	0 34 45	1. 9	28
3	0 3 52	1 17	0 40 18	1. 5	1 5 55	0.36	1 13 53	0. 4	1 2 4	0.44	0 33 36	1.10	27
4	0 5 9	1 18	0 41 23	1. 4	1 6 31	0.32	1 13 49	0. 6	1 1 20	0.44	0 32 26	1.10	26
5	0 6 27	1 17	0 42 27	1. 3	1 7 3	0.33	1 13 43	0. 8	1 0 36	0.45	0 31 16	1.10	25
6	0 7 44	1 17	0 43 30	1. 2	1 7 36	0.30	1 13 35	0. 9	0 59 51	0.46	0 30 6	1.11	24
7	0 9 1	1 17	0 44 32	1. 2	1 8 6	0.30	1 13 26	0.10	0 59 5	0.47	0 28 55	1.12	23
8	0 10 18	1 17	0 45 34	1. 0	1 8 36	0.28	1 13 16	0.11	0 58 18	0.48	0 27 43	1.12	22
9	0 11 35	1 16	0 46 34	1. 0	1 9 4	0.28	1 13 5	0.13	0 57 30	0.49	0 26 31	1.13	21
10	0 12 51	1 17	0 47 34	0.59	1 9 32	0.25	1 12 52	0.14	0 56 41	0.51	0 25 18	1.13	20
11	0 14 8	1 15	0 48 33	0.58	1 9 57	0.25	1 12 38	0.16	0 55 50	0.52	0 24 5	. 4	19
12	0 15 23	1 16	0 49 31	0.56	1 10 22	0.24	1 12 22	0.17	0 54 58	0.51	0 22 51	1.14	18
13	0 16 39	1 15	0 50 27	0.57	1 10 46	0.21	1 12 5	0.17	0 54 7	0.53	0 21 37	1.13	17
14	0 17 54	1 15	0 51 24	0.55	1 11 7	0.21	1 11 48	0.20	0 53 14	0.55	0 20 24	1.15	16
15	0 19 9	1 15	0 52 19	0.55	1 11 28	0.20	1 11 28	0.21	0 52 19	0.55	0 19 9	1.15	15
16	0 20 24	1 13	0 53 14	0.53	1 11 48	0.17	1 11 7	0.21	0 51 24	0.57	0 17 54	1.15	14
17	0 21 37	1 14	0 54 7	0.51	1 12 5	0.17	1 10 46	0.24	0 50 27	0.56	0 16 39	1.16	13
18	0 22 51	1 14	0 54 58	0.52	1 12 22	0.16	1 10 22	0.25	0 49 31	0.58	0 15 23	1.15	12
19	0 24 5	1 13	0 55 50	0.51	1 12 38	0.14	1 9 57	0.25	0 48 33	0.59	0 14 8	1.17	11
20	0 25 18	1 13	0 56 41	0.49	1 12 52	0.13	1 9 32	0.28	0 47 34	1. 0	0 12 51	1.16	10
21	0 26 31	1 12	0 57 30	0.48	1 13 5	0.11	1 9 4	0.28	0 46 34	1. 0	0 11 35	1.17	9
22	0 27 43	1 12	0 58 18	0.47	1 13 16	0.10	1 8 36	0.30	0 45 34	1. 2	0 10 18	1.17	8
23	0 28 55	1 11	0 59 5	0.46	1 13 26	0. 9	1 8 6	0.30	0 44 32	1. 2	0 9 1	1.17	7
24	0 30 6	1 10	59 0 51	0.45	1 13 35	0. 8	1 7 36	0.33	0 43 30	1. 3	0 7 44	1.17	6
25	0 31 16	1 10	1 0 36	0.44	1 13 43	0. 6	1 7 3	0.32	0 42 27	1. 4	0 6 27	1.18	5
26	0 32 26	1 11	1 1 20	0.44	1 13 49	0. 4	1 6 31	0.36	0 41 23	1. 5	0 5 9	1.17	4
27	0 33 36	1 9	1 2 4	0.41	1 13 53	0. 4	1 5 55	0.35	0 40 18	1. 6	0 3 52	1.18	3
28	0 34 45	1 8	1 2 45	0.41	1 13 57	0. 2	1 5 20	0.37	0 39 12	1. 7	0 2 34	1.16	2
29	0 35 53	1 6	1 3 26	0.39	1 13 59	0. 1	1 4 43	0.38	0 38 5	1. 6	0 1 18	1.18	1
30	0 36 59		1 4 5		1 14 0		1 4 5		0 36 59		0 0 0		0
	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Grad.
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		

V. Pro Loco Lunæ in orbita.

Argum. *A dupla dist.* ⊙ *a* ☽ *subtrahatur dupla anomalia Lunæ excentrica.*

Grad.	0 Sign. Adde	I. Sign. Adde	II. Sign. Adde	III. Sign. Adde	IV. Sign. Adde	V. Sign. Adde	
0	0′ 0″	4′ 12″	7′ 16″	8′ 24″	7′ 16″	4′ 12″	30
1	0 9	4 20	7 21	8 24	7 12	4 4	29
2	0 18	4 27	7 25	8 24	7 7	3 57	28
3	0 26	4 34	7 29	8 23	7 3	3 49	27
4	0 35	4 42	7 33	8 23	6 58	3 41	26
5	0 44	4 49	7 37	8 22	6 53	3 33	25
6	0 53	4 56	7 40	8 21	6 48	3 25	24
7	1 1	5 3	7 44	8 20	6 43	3 17	23
8	1 10	5 10	7 47	8 19	6 37	3 9	22
9	1 19	5 17	7 51	8 18	6 32	3 1	21
10	1 28	5 24	7 54	8 16	6 26	2 52	20
11	1 36	5 31	7 57	8 15	6 20	2 44	19
12	1 45	5 37	7 59	8 13	6 15	2 36	18
13	1 53	5 44	8 2	8 11	6 9	2 27	17
14	2 2	5 50	8 4	8 9	6 3	2 19	16
15	2 10	5 56	8 7	8 7	5 56	2 10	15
16	2 19	6 3	8 9	8 4	5 50	2 2	14
17	2 27	6 9	8 11	8 2	5 44	1 53	13
18	2 36	6 15	8 13	7 59	5 37	1 45	12
19	2 44	6 20	8 15	7 57	5 31	1 36	11
20	2 52	6 26	8 16	7 54	5 24	1 28	10
21	3 1	6 32	8 18	7 51	5 17	1 19	9
22	3 9	6 37	8 19	7 47	5 10	1 10	8
23	3 17	6 43	8 20	7 44	5 3	1 1	7
24	3 25	6 48	8 21	7 40	4 56	0 53	6
25	3 33	6 53	8 22	7 37	4 49	0 44	5
26	3 41	6 58	8 23	7 33	4 42	0 35	4
27	3 49	7 3	8 23	7 29	4 34	0 26	3
28	3 57	7 7	8 24	7 25	4 27	0 18	2
29	4 4	7 12	8 24	7 21	4 20	0 9	1
30	4 12	7 16	8 24	7 16	4 12	0 0	0
	Subtr. XI. Sign.	Subtr. X. Sign.	Subtr. IX. Sign.	Subtr. VIII. Sign.	Subtr. VII. Sign.	Subtr. VI. Sign.	Grad.

VI. VII. VIII. Pro Loco Lunæ in orbita.

VI. Argum. *Ad duplam distant.* ☉ *a* ☽ *addatur anomalia Lunæ excentrica.*

Grad.	o Sig. Adde	I.Sig. Adde	II. Adde	III. Adde	IV. Adde	V. Adde	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	0 26	0 44	0 52	0 44	0.26	30
5	0 5	0 30	0 46	0 52	0 42	0.22	25
10	0 9	0 33	0 48	0 51	0 39	0.17	20
15	0 13	0 36	0 50	0 50	0 36	0.13	15
20	0 17	0 39	0 51	0 48	0 33	0. 9	10
25	0 22	0 42	0 52	0 46	0 30	0. 5	5
30	0 26	0 44	0 52	0 44	0 26	0. 0	0
	Subtr. XI.	Subtr. X.	Subtr. IX.	Subtr. VIII.	Subtr. VII.	Subtr. VI.	Grad.

VII. Argum. *A dupla dist.* ☉ *a* ☽ *subtrahatur anomalia Solis excentrica.*

Grad.	o Sig. Subtr.	I.Sig. Subtr.	II. Subtr.	III. Subt.	IV. Subtr.	V. Subtr.	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	0 29	0 49	0 57	0 49	0.29	30
5	0 5	0 33	0 52	0 57	0 47	0.24	25
10	0 10	0 37	0 54	0 56	0 44	0.19	20
15	0 15	0 40	0 56	0 56	0 40	0.15	15
20	0 19	0 44	0 56	0 54	0 37	0.10	10
25	0 24	0 47	0 57	0 52	0 33	0 5	5
30	0 29	0 49	0 57	0 49	0 29	0. 0	0
	Adde XI.	Adde X.	Adde IX.	Adde VIII.	Adde VII.	Adde VI.	Grad.

VIII. Argum. *Ad duplam distant.* ☉ *a* ☽ *addatur anomalia Solis excentrica.*

Grad.	o Sign. Subtr.	I. Subtr.	II. Subtr.	III Subtr.	IV. Subtr.	V. Subtr.	
	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	′ ″	
0	0 0	0 21	0 36	0 42	0 36	0 21	30
5	0 4	0 24	0 38	0 42	0 34	0 18	25
10	0 7	0 27	0 40	0 41	0 32	0 14	20
15	0 11	0 30	0 41	0 41	0 30	0 11	15
20	0 14	0 32	0 41	0 40	0 27	0 7	10
25	0 18	0 34	0 42	0 38	0 24	0 4	5
30	0 21	0 36	0 42	0 36	0 21	0 0	0
	Adde XI.	Adde X.	Adde IX.	Adde VIII.	Adde VII.	Adde VI.	Grad.

I. Pro Longitudine nodi ascendentis.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Grad.	0 Sign. Subtr.		I. Sign. Subtr.		II. Sign. Subtr.		III. Sign. Subtr.		IV. Sign. Subtr.		V. Sign. Subtr.		
0	0′	0″	0′	51″	1′	28″	1′	42″	1′	28″	0′	51″	30
1	0	2	0	53	1	29	1	42	1	28	0	50	29
2	0	4	0	54	1	30	1	42	1	27	0	48	28
3	0	6	0	56	1	31	1	42	1	26	0	46	27
4	0	8	0	57	1	32	1	42	1	25	0	45	26
5	0	9	0	58	1	32	1	42	1	24	0	43	25
6	0	11	1	0	1	33	1	41	1	23	0	42	24
7	0	13	1	1	1	34	1	41	1	22	0	40	23
8	0	15	1	3	1	35	1	41	1	21	0	38	22
9	0	17	1	5	1	36	1	41	1	20	0	37	21
10	0	18	1	6	1	36	1	40	1	18	0	35	20
11	0	20	1	7	1	37	1	40	1	17	0	34	19
12	0	21	1	9	1	37	1	40	1	16	0	32	18
13	0	23	1	10	1	38	1	39	1	15	0	30	17
14	0	25	1	11	1	38	1	39	1	14	0	28	16
15	0	26	1	12	1	39	1	39	1	12	0	26	15
16	0	28	1	14	1	39	1	38	1	11	0	25	14
17	0	30	1	15	1	39	1	38	1	10	0	23	13
18	0	32	1	16	1	40	1	37	1	9	0	21	12
19	0	34	1	17	1	40	1	37	1	7	0	20	11
20	0	35	1	18	1	40	1	36	1	6	0	18	10
21	0	37	1	20	1	41	1	36	1	5	0	17	9
22	0	38	1	21	1	41	1	35	1	3	0	15	8
23	0	40	1	22	1	41	1	34	1	1	0	13	7
24	0	42	1	23	1	41	1	33	1	0	0	11	6
25	0	43	1	24	1	42	1	32	0	58	0	9	5
26	0	45	1	25	1	42	1	32	0	57	0	8	4
27	0	46	1	26	1	42	1	31	0	56	0	6	3
28	0	48	1	27	1	42	1	30	0	54	0	4	2
29	0	50	1	28	1	42	1	29	0	53	0	2	1
30	0	51	1	28	1	42	1	28	0	51	0	0	0
	Adde XI. Sign.		Adde X. Sign.		Adde IX. Sign.		Adde VIII. Sign.		Adde VII. Sign.		Adde VI. Sign.		Grad.

II. Pro Longitudine nodi aſcendentis.

Argum. *Anomalia media Solis.*

Grad.	o Sign. Adde	I. Sign. Adde	II. Sign. Adde	III. Sign. Adde	IV. Sign. Adde	V. Sign. Adde	
0	0′ 0″	3′ 35″	6′ 17″	7′ 19″	6′ 24″	3′ 43″	30
1	0 8	3 41	6 21	7 19	6 20	3 36	29
2	0 15	3 48	6 25	7 19	6 17	3 29	28
3	0 23	3 55	6 29	7 19	6 13	3 22	27
4	0 30	4 2	6 32	7 18	6 8	3 15	26
5	0 38	4 8	6 35	7 18	6 5	3 8	25
6	0 45	4 14	6 38	7 17	6 1	3 1	24
7	0 53	4 20	6 41	7 17	5 56	2 54	23
8	1 0	4 26	6 44	7 16	5 51	2 47	22
9	1 8	4 32	6 47	7 15	5 46	2 41	21
10	1 15	4 38	6 50	7 14	5 41	2 33	20
11	1 22	4 44	6 52	7 13	5 36	2 25	19
12	1 29	4 49	6 54	7 11	5 31	2 17	18
13	1 37	4 54	6 57	7 10	5 26	2 11	17
14	1 44	5 0	7 0	7 8	5 21	2 3	16
15	1 51	5 6	7 2	7 7	5 16	1 56	15
16	1 59	5 11	7 4	7 5	5 10	1 47	14
17	2 5	5 16	7 5	7 3	5 5	1 40	13
18	2 13	5 21	7 8	7 1	4 59	1 32	12
19	2 20	5 27	7 9	6 59	4 53	1 25	11
20	2 27	5 32	7 11	6 56	4 47	1 17	10
21	2 34	5 37	7 12	6 53	4 41	1 9	9
22	2 40	5 41	7 13	6 50	4 35	1 2	8
23	2 47	5 46	7 14	6 47	4 29	0 54	7
24	2 54	5 51	7 15	6 44	4 23	0 47	6
25	3 2	5 56	7 16	6 41	4 17	0 38	5
26	3 8	5 59	7 17	6 38	4 10	0 31	4
27	3′ 15	6 4	7 17	6 35	4 3	0 23	3
28	3 22	6 8	7 18	6 32	3 57	0 16	2
29	3 28	6 13	7 18	6 28	3 50	0 8	1
30	3 35	6 17	7 19	6 24	3 43	0 0	0
	Subtr. XI. Sign.	Subtr. X. Sign.	Subtr. IX. Sign.	Subtr. VIII. Sign.	Subtr. VII. Sign.	Subtr. VI. Sign.	Grad.

III. Pro longitudine nodi & inclinatione orbitæ ad eclipticam.

Argum. *Subtrahatur longitudo nodi ☊ a longitudine Solis vera.*

Gradus	VI. Sign. 0			VII. Sign. I.			VIII. Sign. II.			
	Adde	differ.	Inclin.	Adde	differ.	Inclin.	Adde	differ.	Inclin.	
	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	
0	0 0 0		5 17 5	1 19 34		5 12 52	1 17 16		5 4 46	30
1	0 3 16	3 16	5 17 4	1 21 4	1 30	5 12 37	1 15 37	1 39	5 4 32	29
2	0 6 31	3 15	5 17 3	1 22 27	1 23	5 12 21	1 13 52	1 45	5 4 18	28
3	0 9 45	3 14	5 17 2	1 23 43	1 16	5 12 6	1 12 1	1 51	5 4 4	27
4	0 12 58	3 13	5 17 0	1 24 53	1 10	5 11 50	1 10 5	1 56	5 3 51	26
5	0 16 10	3 12	5 16 58	1 25 56	1 3	5 11 33	1 8 4	2 1	5 3 38	25
6	0 19 21	3 11	5 16 55	1 26 54	0 58	5 11 17	1 5 58	2 6	5 3 26	24
7	0 22 30	3 9	5 16 50	1 27 44	0 50	5 11 1	1 3 47	2 11	5 3 14	23
8	0 25 58	3 8	5 16 46	1 28 28	0 44	5 10 45	1 1 33	2 14	5 3 2	22
9	0 28 45	3 7	5 16 41	1 29 6	0 38	5 10 28	0 59 16	2 17	5 2 52	21
10	0 31 49	3 4	5 16 35	1 29 37	0 31	5 10 11	0 56 54	2 22	5 2 41	20
11	0 34 49	3 0	5 16 28	1 30 3	0 26	5 9 54	0 54 28	2 26	5 2 31	19
12	0 37 47	2 58	5 16 21	1 30 22	0 19	5 9 37	0 51 58	2 30	5 2 22	18
13	0 40 43	2 56	5 16 13	1 30 34	0 12	5 9 20	0 49 25	2 33	5 2 13	17
14	0 43 35	2 52	5 16 5	1 30 37	0 3	5 9 3	0 46 48	2 37	5 2 4	16
15	0 46 25	2 50	5 15 57	1 30 33	0 4	5 8 46	0 44 7	2 41	5 1 55	15
16	0 49 10	2 45	5 15 48	1 30 25	0 8	5 8 29	0 41 23	2 44	5 1 47	14
17	0 51 51	2 41	5 15 38	1 30 10	0 15	5 8 12	0 38 37	2 46	5 1 40	13
18	0 54 28	2 37	5 15 28	1 29 48	0 22	5 7 55	0 35 49	2 48	5 1 33	12
19	0 57 2	2 34	5 15 17	1 29 19	0 29	5 7 38	0 32 59	2 50	5 1 27	11
20	0 59 30	2 28	5 15 6	1 28 43	0 36	5 7 21	0 30 7	2 52	5 1 21	10
21	1 1 54	2 24	5 14 54	1 28 2	0 41	5 7 5	0 27 11	2 56	5 1 15	9
22	1 4 13	2 19	4 14 42	1 27 14	0 48	5 6 49	0 24 14	2 57	5 1 10	8
23	1 6 27	2 14	5 14 30	1 26 20	0 54	5 6 33	0 21 16	2 58	5 1 6	7
24	1 8 36	2 9	5 14 18	1 25 20	1 0	5 6 17	0 18 17	2 59	5 1 3	6
25	1 10 40	2 4	5 14 5	1 24 14	1 6	5 6 1	0 15 16	3 1	5 1 0	5
26	1 12 39	1 59	5 13 51	1 23 3	1 11	5 5 45	0 12 14	3 2	5 0 58	4
27	1 14 31	1 52	5 13 36	1 21 45	1 18	5 5 30	0 9 11	3 3	5 0 56	3
28	1 16 18	1 47	5 13 22	1 20 21	1 24	5 5 15	0 6 7	3 4	5 0 55	2
29	1 17 59	1 41	5 13 7	1 18 52	1 29	5 5 0	0 3 4	3 3	5 0 54	1
30	1 19 34	1 35	5 12 52	1 17 16	1 36	5 4 46	0 0 0	3 4	5 0 53	0
	Subtr.	differ.	Inclin.	Subtr.	differ.	Inclin.	Subtr.	differ.	Inclin.	Gradus
	V. Sign. XI.			IV. Sign. X.			III. Sign. IX.			

IV. Prima columna pro longitudine nodi, tertia pro inclinatione ad eclipticam.

Argum. *Subtrahatur Longitudo Solis a longitudine Lunæ.*

Gradus.	VI. Sign. 0 Subtr.	diff.	Subtr.	VII. Sign. I. Subtr.	diff.	Subtr.	VIII. Sign. II. Subtr.	diff	Adde	
0	0′ 0″	16″	42″	6′ 28″	6	21″	6′ 28″	10	21″	30
1	0 16	15	42	6 34	7	20	6 18	9	22	29
2	0 31	16	42	6 41	6	18	6 9	10	23	28
3	0 47	15	41	6 47	7	17	5 59	9	25	27
4	1 2	16	41	6 54	6	15	5 50	10	26	26
5	1 18	15	41	7 0	4	14	5 40	10	27	25
6	1 33	15	41	7 4	4	12	5 30	11	28	24
7	1 48	15	40	7 8	5	11	5 19	10	29	23
8	2 3	15	40	7 13	4	10	5 9	11	30	22
9	2 18	15	39	7 17	3	8	4 58	10	31	21
10	2 33	14	39	7 20	2	7	4 48	13	32	20
11	2 47	14	38	7 22	2	6	4 35	13	33	19
12	3 1	15	38	7 24	1	4	4 22	12	34	18
13	3 16	14	37	7 25	2	2	4 10	13	35	17
14	3 30	14	36	7 27	1	1	3 57	13	35	16
15	3 44	13	36	7 28	1	0	3 44	14	36	15
16	3 57	13	35	7 27	2	1	3 30	14	36	14
17	4 10	12	35	7 25	1	2	3 16	15	37	13
18	4 22	13	34	7 24	2	4	3 1	14	38	12
19	4 35	12	37	7 22	2	6	2 47	14	38	11
20	4 47	11	32	7 20	3	7	2 33	15	39	10
21	4 58	11	31	7 17	4	8	2 18	15	39	9
22	5 9	10	30	7 13	5	10	2 3	15	40	8
23	5 19	11	29	7 8	4	11	1 48	15	40	7
24	5 30	10	28	7 4	4	12	1 33	15	41	6
25	5 40	10	27	7 0	6	14	1 18	16	41	5
26	5 50	9	26	6 54	7	15	1 2	15	41	4
27	5 59	10	25	6 47	6	17	0 47	16	41	3
28	6 9	9	23	6 41	7	18	0 31	15	42	2
29	6 18	10	22	6 34	6	20	0 16	16	42	1
30	6 28		21	6 28		21	0 0		42	0
	Adde V. Sign. IX.	diff.	Subtr.	Adde IV. Sign. X.	diff.	Adde	Adde III. Sign. IX.	diff.	Adde	Gradus.

V. Prima columna pro longitudine nodi & reductione loci Lunæ ad eclipticam, secunda pro inclinatione ad eclipticam.

Argum. *Subtrabatur longitudo ☊ a longitudine Lunæ.*

Gradus.	VI. Sign. 0 — Adde	VI. Sign. 0 — Adde	VII. Sign. I. — Adde	VII. Sign. I. — Adde	VIII. Sign. II. — Adde	VIII. Sign. II. — Subtr.	
0	0' 0''	38''	6' 2''	19''	6' 2'	19''	30
1	0 15	38	6 9	18	5 55	20	29
2	0 30	38	6 15	17	5 47	21	28
3	0 44	38	6 21	16	5 39	23	27
4	0 58	37	6 27	14	5 30	24	26
5	1 12	37	6 32	13	5 20	25	25
6	1 27	37	6 37	11	5 10	26	24
7	1 41	37	6 41	10	5 0	27	23
8	1 55	36	6 45	9	4 50	28	22
9	2 9	36	6 48	8	4 39	29	21
10	2 23	36	6 51	7	4 28	30	20
11	2 37	36	6 54	6	4 17	31	19
12	2 50	35	6 56	4	4 5	32	18
13	3 3	35	6 57	2	3 53	33	17
14	3 16	34	6 57	1	3 41	33	16
15	3 29	34	6 57	0	3 29	34	15
16	3 41	33	6 57	1	3 16	34	14
17	3 53	33	6 57	2	3 3	35	13
18	4 5	32	6 56	4	2 50	35	12
19	4 17	31	6 54	6	2 37	36	11
20	4 28	30	6 51	7	2 23	36	10
21	4 39	29	6 48	8	2 9	36	9
22	4 50	28	6 45	9	1 55	36	8
23	5 0	27	6 41	10	1 41	37	7
24	5 10	26	6 37	11	1 27	37	6
25	5 20	25	6 32	13	1 12	37	5
26	5 30	24	6 27	14	0 58	37	4
27	5 39	23	6 21	16	0 44	38	3
28	5 47	21	6 15	17	0 30	38	2
29	5 55	20	6 9	18	0 15	38	1
30	6 2	19	6 2	19	0 0	38	0
	Subtr.	Adde	Subtr.	Subtr.	Subtr.	Subtr.	
	V. XI. Sign.		IV. X. Sign.		III. IX. Sign.		Gradus.

Æquatio primæ columnæ hujus tabulæ juxta titulos applicata dat æquationem nodi, sed adversus titulos applicata dat reductionem Lunæ ad eclipticam.

I. Pro diſtantia Lunæ a Terra.

Argum. *Anomalia media Lunæ.*

Grad.	0 Sign.		I. Sign.		II. Sign.		III. Sign.		IV. Sign.		V. Sign.		
	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	
0	105364		104713		102892		100292		97546		95433		30
1	105363	1	104670	43	102816	76	100198	94	97461	85	95382	51	29
2	105361	2	104626	44	102737	79	100105	93	97376	85	95333	49	28
3	105357	4	104580	46	102659	78	100011	94	97292	84	95286	47	27
4	105352	5	104532	48	102580	79	99917	94	97210	82	95240	46	26
5	105345	7	104483	49	102499	81	99823	94	97128	82	95195	45	25
6	105337	8	104433	50	102417	82	99729	94	97047	81	95152	43	24
7	105328	9	104383	50	102335	82	99636	93	96968	79	95111	41	23
8	105317	11	104330	53	102253	82	99541	95	96888	80	95072	39	22
9	105304	13	104277	53	102169	84	99447	94	96810	78	95033	39	21
10	105290	14	104222	55	102085	84	99355	92	96733	77	94997	36	20
11	105274	16	104165	57	102001	84	99261	94	99657	76	94961	36	19
12	105258	16	104108	57	101916	85	99168	93	96582	75	94928	33	18
13	105240	18	104050	58	101829	87	99075	93	96508	74	94896	32	17
14	105220	20	103991	59	101742	87	98982	93	96434	74	94867	29	16
15	105200	20	103930	61	101655	87	98890	92	96362	72	94839	28	15
16	105177	23	103868	62	101567	88	98797	93	96291	71	94814	25	14
17	105152	25	103805	63	101478	89	98705	92	96222	69	94789	25	13
18	105127	25	103741	64	101390	88	98613	92	96153	69	94767	22	12
19	105101	26	103676	65	101300	90	98522	91	96086	67	94745	22	11
20	105072	29	103610	66	101211	89	98431	91	96019	67	94726	19	10
21	105043	29	103543	67	101120	91	98340	91	95954	65	94708	18	9
22	105011	32	103475	68	101030	90	98249	91	95890	64	94694	14	8
23	104978	33	103405	70	100938	92	98160	89	95829	61	94680	14	7
24	104945	33	103334	71	100847	91	98070	90	95768	61	94668	12	6
25	104909	36	103263	71	100755	92	97981	89	95709	59	94658	10	5
26	104873	36	103192	71	100662	93	97892	89	95651	58	94650	8	4
27	104835	38	103118	74	100570	92	97804	88	95595	56	94643	7	3
28	104796	39	103044	74	100477	93	97718	86	95540	55	94640	3	2
29	104755	41	102969	75	100385	92	97632	86	95486	54	94637	3	1
30	104713	42	102892	77	100292	93	97546	86	95433	53	94636	1	0
	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	☽ a ♁	diff.	
	XI. Sign.		X. Sign.		IX. Sign.		VIII. Sign.		VII. Sign.		VI. Sign.		Grad.

Pro distantia Lunæ a terra.
gum. *Anomalia excentr. Solis.*

o	I.	II.	III.	IV.	V.
Subt.	Subt.	Subt.	Ad d	Adde	Add
12	10	5	0	5	10
12	10	5	0	5	10
12	10	4	0	5	10
12	9	4	0	5	10
12	9	4	1	5	10
12	9	4	1	6	11
12	9	4	1	6	11
12	9	4	1	6	11
12	9	4	2	6	11
12	9	4	2	6	11
12	8	4	2	7	11
12	8	3	2	7	11
12	8	3	2	7	11
12	8	3	3	7	11
12	8	3	3	7	12
12	8	3	3	8	12
12	7	3	3	8	12
11	7	3	3	8	12
11	7	2	3	8	12
11	7	2	3	8	12
11	7	2	4	8	12
11	6	2	4	9	12
11	6	2	4	9	12
11	6	1	4	9	12
11	6	1	4	9	12
11	6	1	4	9	12
10	5	1	4	9	12
10	5	0	4	9	12
10	5	0	4	10	12
10	5	0	5	10	12
10	5	0	5	10	12
Subt.	Subt.	Subt.	Adde	Add.	Add.
XI.	X.	IX.	VIII	VII	VI.

III. Pro distantia Lunæ a terra.
Argum. *Subtr. longitudo Solis a longitudine ☽æ bis correcta.*

o Sign.		I. Sign.		II.		III.		IV.		V.		
Subt.	diff.	Subt.	diff.	Adde	diff	Add.	diff.	Adde	diff.	Subt.	diff.	
687	1	334	21	370	22	715	1	342	23	380	22	30
686	1	313	22	392	20	714	2	319	22	402	21	29
685	2	291	22	412	20	712	3	297	23	423	20	28
683	3	269	23	432	20	709	4	274	24	443	21	27
680	4	246	23	452	19	705	4	250	23	464	19	26
676	4	223	23	471	18	701	5	227	24	483	19	25
672	7	200	23	489	18	696	6	203	24	502	18	24
665	6	177	24	507	17	690	7	179	24	520	18	23
659	7	153	24	524	17	683	8	155	25	538	17	22
652	8	129	25	541	15	675	9	130	25	555	16	21
644	9	104	24	556	16	666	9	105	25	571	16	20
635	10	80	25	572	14	657	10	80	26	587	15	19
625	10	55	24	586	14	647	11	54	25	602	14	18
615	11	31	25	600	14	636	12	29	25	616	14	17
604	12	6 [redacted]	24	614	12	624	13	4 [redacted]	25	630	12	16
592	13	18	25	626	12	611	13	21	25	642	13	15
579	14	43	24	638	11	598	16	46	25	655	11	14
565	14	67	25	649	10	582	14	71	25	666	10	13
551	14	92	24	659	9	568	15	96	25	676	10	12
537	15	116	24	668	9	553	16	121	25	686	9	11
522	16	140	25	677	8	537	17	146	25	695	8	10
506	17	165	24	685	7	520	17	171	24	703	7	9
489	17	189	24	692	5	503	19	195	25	710	7	8
472	18	213	23	697	5	484	19	220	23	717	5	7
454	19	236	23	702	4	465	19	243	24	722	5	6
435	19	259	23	706	4	446	20	267	24	727	4	5
416	20	282	23	710	2	426	20	291	23	731	3	4
396	20	305	22	712	2	406	21	314	23	734	2	3
376	21	327	22	714	1	385	21	337	22	736	1	2
355	21	349	21	715	0	364	22	359	21	737	1	1
334		370		715		342		380		738		0
Subt.	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Subt.	diff.	Subt.	diff.	Grad.
XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.		

IV. Pro distantia Lunæ a Terra.

Argum. *A dupla dist.* ☉ *a* ☽ *subtr. anom. Lunæ excentr.*

Grad.	0 Sign. Adde	diff.	I. Sign. Adde	diff.	II. Adde	diff.	III. Subt.	diff.	IV. Subt.	diff.	V. Subt.	diff.
0	999	0	865	9	500	16	0	18	500	14	865	9
1	999	1	856	9	484	15	18	17	514	15	874	8
2	998	1	847	10	469	16	35	18	529	14	882	7
3	997	1	837	9	453	15	53	18	543	14	889	8
4	996	1	828	10	438	15	71	16	557	16	897	8
5	995	2	818	10	423	17	87	17	573	14	905	7
6	993	2	808	10	406	16	104	18	587	14	912	7
7	991	2	798	11	390	16	122	17	601	14	919	7
8	989	3	787	11	374	17	139	17	615	14	926	7
9	986	2	776	11	357	16	156	17	629	13	933	6
10	984	3	765	12	341	16	173	18	642	13	939	5
11	981	3	753	11	325	17	191	17	655	13	944	6
12	978	4	742	11	308	15	208	17	668	14	950	5
13	974	4	731	13	293	17	225	17	682	11	955	6
14	970	5	718	12	276	18	242	16	693	13	961	4
15	965	4	706	13	258	16	258	18	706	12	965	5
16	961	6	693	11	242	17	276	17	718	13	970	4
17	955	5	682	14	225	17	293	15	731	11	974	4
18	950	6	668	13	208	17	308	17	742	11	978	3
19	944	5	655	13	191	18	325	16	753	12	981	3
20	939	6	642	13	173	17	341	16	765	11	984	2
21	933	7	629	14	156	17	357	17	776	11	986	3
22	926	7	615	14	139	17	374	16	787	11	989	2
23	919	7	601	14	122	18	390	16	798	10	991	2
24	912	7	587	14	104	17	406	17	808	10	993	2
25	905	8	573	16	87	16	423	15	818	10	995	1
26	897	8	557	14	71	18	438	15	828	9	996	1
27	889	7	543	14	53	18	453	16	837	10	997	1
28	882	8	529	15	35	17	469	15	847	9	998	1
29	874	9	514	14	18	18	484	16	856	9	999	0
30	865		500		0		500		865		999	
	Adde	diff.	Adde	diff.	Adde	diff.	Subt.	diff.	Subt.	diff.	Subt.	diff.
	XI.		X.		IX.		VIII.		VII.		VI.	

V. Pro distantia ☽æ à Terra.

Argum. *A dupla dist.* ☉ *a* ☽ *subtrah. dupla anom. Lunæ excentr.*

0 Subt.	I. Subt.	II. Subt.	III. Adde	IV. Adde	V. Adde	
118	102	59	0	59	102	30
118	101	57	2	61	103	29
118	100	55	4	63	104	28
118	99	53	6	65	105	27
118	98	51	8	66	106	26
118	97	50	10	68	107	25
117	96	48	13	70	108	24
117	94	46	17	71	109	23
117	93	44	20	72	109	22
117	92	42	22	74	110	21
116	90	40	24	76	111	20
116	89	38	25	77	112	19
115	88	36	26	78	112	18
115	86	34	27	80	113	17
114	85	33	29	82	113	16
114	83	31	31	83	114	15
113	82	29	33	85	114	14
113	80	27	34	86	115	13
112	78	26	36	88	115	12
112	77	25	38	89	116	11
111	76	24	40	90	116	10
110	74	22	42	92	117	9
109	72	20	44	93	117	8
109	71	17	46	94	117	7
108	70	13	48	96	117	6
107	68	10	50	97	118	5
106	66	8	51	98	118	4
105	65	6	53	99	118	3
104	63	4	55	100	118	2
103	61	2	57	101	118	1
102	59	0	59	102	118	0
Subt.	Subt.	Subt.	Adde	Adde	Adde	Grad.
XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	

VI. VII. VIII. Pro diſtantia Lunæ a Terra.

VI. Argum. *Ad duplam diſtant.* ☉ *a* ☽ *addatur anomalia Lunæ excentrica.*

Grad.	o Sig.	I. Sig.	II.	III.	IV.	V.	
	Subtr.	Subtr.	Subtr.	Adde	Adde	Adde	
0	34	30	17	0	17	30	30
5	34	28	15	3	20	31	25
10	33	26	12	6	22	32	20
15	33	24	9	9	24	33	15
20	32	22	6	12	26	33	10
25	31	20	3	15	28	34	5
30	30	17	0	17	30	34	0
	Subtr.	Subt.	Subtr.	Adde	Adde	Adde	
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	Grad.

VII. Argum. *A dupla diſt.* ☉ *a* ☽ *ſubtrahatur anomalia Solis excentrica.*

Grad.	o Sig.	I. Sig.	II.	III.	IV.	V.	
	Adde	Adde	Adde	Subtr.	Subtr.	Subtr.	
0	19	16	9	0	9	16	30
5	19	15	8	2	11	17	25
10	18	14	6	3	12	17	20
15	18	13	5	5	13	17	15
20	17	12	3	6	14	18	10
25	17	11	2	8	15	19	5
30	16	9	0	9	16	19	0
	Adde	Adde	Adde	Subtr.	Subtr.	Subtr.	
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	Grad.

VIII. Argum. *Ad duplam diſtant.* ☉ *a* ☽ *addatur anomalia Solis excentrica.*

Grad.	o Sign.	I.	II.	III	IV.	V.	
	Adde	Adde	Adde	Subtr.	Subtr.	Subtr.	
0	14	12	7	0	7	12	30
5	14	12	6	2	8	12	25
10	13	11	5	3	9	13	20
15	13	10	4	4	10	13	15
20	13	9	3	5	11	13	10
25	12	8	2	6	12	14	5
30	12	7	0	7	12	14	0
	Adde	Adde	Adde	Subtr.	Subtr.	Subt.	
	XI.	X.	IX.	VIII.	VII.	VI.	Grad.

Pro Diametro apparente & Parallaxi Lunæ horizontali.

dist. ☽æ a ♁	diam. appar.		Parall. horiz.		distant. ☽æ a ♁	diam. appar.		Parall. horiz.	
92500	34′	3″	61′	59″	100000	31′	30″	57′	20″
92750	33	57	61	49	100250	31	25	57	11
93000	33	52	61	39	100500	31	20	57	3
93250	33	46	61	29	100750	31	15	56	54
93500	33	41	61	20	101000	31	11	56	46
93750	33	36	61	10	101250	31	6	56	37
94000	33	31	61	0	101500	31	2	56	29
94250	33	25	60	50	101750	30	57	56	20
94500	33	20	60	40	102000	30	53	56	12
94750	33	15	60	31	102250	30	48	56	4
95000	33	10	60	21	102500	30	44	55	56
95250	33	4	60	11	102750	30	39	55	48
95500	32	59	60	2	103000	30	35	55	40
95750	32	54	59	52	103250	30	30	55	32
96000	32	49	59	43	103500	30	26	55	24
96250	32	43	59	33	103750	30	21	55	16
96500	32	38	59	24	104000	30	17	55	8
96750	32	33	59	15	104250	30	12	55	0
97000	32	28	59	6	104500	30	8	54	52
97250	32	23	58	57	104750	30	4	54	44
97500	32	18	58	48	105000	30	0	54	37
97750	32	13	58	39	105250	29	55	54	29
98000	32	9	58	30	105500	29	51	54	21
98250	32	4	58	21	105750	29	47	54	13
98500	31	59	58	12	106000	29	43	54	5
98750	31	54	58	3	106250	29	38	53	57
99000	31	49	57	54	106500	29	34	53	50
99250	31	44	57	45	106750	29	30	53	42
99500	31	39	57	37	107000	29	26	53	35
99750	31	34	57	28	107250	29	22	53	27
100000	31	30	57	20	107500	29	18	53	20

NOVA

NOVA THEORIA LUCIS & COLORUM.

Caput I.

De Visione in genere.

§. I.

Omnem sensationem fieri per contactum, quo in nostro corpore mutatio quædam producatur, tam ratio quam experientia ita dilucide docet, ut nullum amplius dubium superesse possit. Cum enim corpus nostrum ita sit comparatum, & in eum finem a Sapientissimo Creatore destinatum, ut anima ex impressionibus, quæ in eo contingunt, de statu rerum extra nos positarum judicare possit; nullum corpus externum nobis cognoscere licet, nisi quatenus ab eo in nostro corpore mutatio quædam efficiatur. In tactu quidem & gustu objecta non solum nobis proxima, sed quæ etiam horum sensuum organa immediate contingant, sentimus; per odoratum vero corpora aliquantum remota sensum nostrum afficiunt. Auditus autem se ad corpora multo magis remota extendit, sonumque per satis notabile spatium percipit. At vero visus beneficio objecta maximo etiam intervallo a nobis dissita cernimus & cognoscimus. *Tabula V. VI.*

§. II. Quemadmodum corpora, quæ ſenſoria noſtra immediate tangunt, impreſſionem ſeu mutationem quandam in iis faciant, non difficulter intelligitur. Verum quo pacto corpora a nobis remota nos afficere queant, diligentius eſt examinandum. Duplici autem modo hoc fieri poſſe mox deprehendemus: vel enim ab his corporibus effluvia emanant, atque ſenſuum noſtrorum organa feriunt: vel in circumjacentibus corporibus ejusmodi motionem excitant, quæ ad noſtros ſenſus usque per omnia corpora intermedia propagetur. Priori modo ſenſatio noſtra abſolvitur in odoratu, quippe quo particulæ ſubtiles ex corporibus olentibus evolantes nares noſtras perſtringunt. In auditu autem nihil ex corporibus ſonoris ad aures noſtras perferri certum eſt, ſed inde motus quidam tremulus per aërem & alia corpora interpoſita usque ad organum auditus propagatur, qui in nobis ſenſum ſoni efficiat.

§. III. Quod autem ad viſum attinet, naturæ ſcrutatores nondum omnes inter ſe conveniunt, neque adhuc firmiter evictum videtur, utrum ſenſus viſus per effluvia, quæ a corporibus ſpectabilibus in oculos noſtros incurrant, excitetur, uti fit in olfactu? an vero uti in auditu motio quædam cum corporibus continguis communicetur, atque ſic pedetentim ad oculos noſtros transferatur. Neutonus, qui hanc de viſione doctrinam ampliſſimis inventis locupletavit, & quaſi ad ſnmmum perfectionis gradum evexiſſe videtur, priorem ſententiam tuetur, & ſtatuit radios viſivos ex ſole

aliisque

aliisque corporibus lucidis indefinenter effluere, atque adeo visum simili modo, quo olfactum, absolvi. Cartesius autem & plerique alii Philosophi alteram sententiam amplectuntur, atque lumen simili modo quo sonum a corporibus lucidis ad nos usque propagari volunt.

§. IV. Cum igitur hæc quæstio, antequam quicquam certi in hac amplissima Physicæ parte invenire liceat, decidi debeat, argumenta, quæ ad utramque sententiam confirmandam afferri solent, sedulo perpendamus, quo facilius, utra probabilior sit judicare possimus. Quamvis enim summum cujusque theoriæ firmamentum in perfecta omnium phænomenorum explicatione, quam deinceps sum traditurus, sit positum; tamen ne dubitatio in ipso limine concepta animum lectoris diutius ambiguum teneat, operam dabo, ut alteram sententiam, qua visio instar auditus per propagationem absolvi statuitur, non solum altera magis probabilem, sed etiam veritati prorsus consentaneam ostendam.

§. V. Ac primo quidem, cum natura in translatione sonorum nullis effluviis utatur, sed ob majores distantias, ad quas effluvia vix penetrare possent, alterum propagationis modum sequatur, verisimillimum videtur, cum lumen ad distantias incomparabiliter majoris diffundatur, naturam ad hunc scopum obtinendum multo minus effluvia esse adhibituram. Tum vero inter auditum & visum ubique tanta regnat similitudo, dum contra ratio videndi olfactui est dissimillima, ut lucis diffusio multo magis propagationi sono-

rum ſimilis ſit cenſenda, quam diſperſioni odorum. Interim tamen hoc argumentum, etſi non parum habet roboris, iis, qui contrariæ opinioni ſunt addicti, vix attentione dignum videri ſolet: quamobrem ipſa fundamenta, quibus hi ſuam ſententiam confirmare conantur, potiſſimum erunt examinanda ac labefactanda.

§. VI. Præcipuum autem argumentum pro vera luminis ex corporibus lucidis emanatione probanda ex inconvenientia ſpatii ubique pleni peti ſolet. Quemadmodum enim ſonus nonniſi per ſpatia vel aëre, vel aliis corporibus repleta transmitti poteſt, ita quoque ſi lumen a ſole ſtellisque fixis ſimili modo, quo ſonus, ad nos propagaretur, univerſum ſpatium nos inter ac ſolem ſtellasque fixas materia quadam ſubtili repletum ſtatui oporteret. Quæ cum non poſſit nullam reſiſtentiam motui planetarum & cometarum objicere, Neutonus cum nullam retardationem in his corporibus deprehendere potuerit, cœlos omnis reſiſtentiæ expertes atque adeo vacuos ſtatuere eſt coactus; ſicque ſyſtema Carteſii, qui nullum vacuo locum reliquit, vehementiſſime oppugnavit.

§. VII. Ad hoc argumentum, quod plerisque Neutoni ſectatoribus omni exceptione majus videtur, primum animadverto, ipſos hoc modo vacuum tuendo male ſibi conſtare, atque adeo ſibi ipſos contradicere. Cum enim radii luminis ſint effluvia corporea ex ſole atque ſtellis fixis perpetuo emanantia, neceſſe eſt ut univerſum ſpatium hujusmodi effluviis continuo ſit pleniſſimum; quoniam nusquam

ne

ne punctum quidem concipere licet, ad quod non indesinenter infinita radiorum multitudo tam ex ſole quam ex ſtellis penetret. Hincque ergo fit, ut dum iſti Philoſophi ſpatium mundi ab omni materia purgare conantur, iidem hoc ſpatium radiorum materia pleniſſimum efficiant.

§. VIII. Neque igitur id aſſequuntur, quod tamen imprimis intendunt, ut planetæ & cometæ nullam reſiſtentiam offendentes nihil de motu ſuo amittant. Si enim omne medium corporeum reſiſtentiam parit, neceſſe eſt, ut iſta quoque radiorum lucis materia, quæ omnia ſpatia cumulatiſſime adimplet, motui illorum corporum quodammodo reſiſtat. Sin autem hanc reſiſtentiam tam exiguam putent, ut non niſi poſt plurium ſeculorum decurſum effectus fiat ſenſibilis, hoc ipſo contrariam ſententiam impugnare ceſſant. Dum enim concedunt motus planetarum & cometarum in ſpatio non vacuo tales, quales obſervantur, ſubſiſtere poſſe, eodem jure materiam illam ſubtilem, per quam lumen ad ſimilitudinem ſoni propagetur, agnoſcere debebunt, dummodo ejus reſiſtentia non ſtatuatur major, quam obſervationes permittunt.

§. IX. Præterea vero ſecundum Neutoni ſententiam radii lucis non ſolum univerſum mundi ſpatium penitus implebunt, ſed etiam motu perniciſſimo permeabunt. Si enim lumen a ſole intervallo 8 minutorum primorum ad nos perveniat, atque perpetuo eadem celeritate progredi pergat, rapidiſſimus motus, quo iſta materia jugiter omnia mundi

ſpatia percurrit, omnem imaginationis vim ſuperat. Hinc cum initio cœlos vacuos & tranquillos ſtatuere voluerint, nunc non ſolum plenos, ſed etiam in ſtatu perturbatiſſimo conſtitutos agnoſcere debent, atque adeo vix concipi poterit, quomodo fiat, ut motus planetarum & cometarum inde non admodum ſenſibiliter perturbarentur.

§. X. Aliud autem argumentum magis mathematicum ſummus Neutonus ad ſimilitudinem propagationis luminis ac ſoni refellendam in Principiis affert. Sub finem libri ſecundi ubi propagationem pulſuum per medium elaſticum exponit, hujusmodi pulſus non ſolum circumquaque a corpore tremulo diffundi oportere oſtendit: ſed etiam cum per foramen in conclave ſint ingreſſi, affirmat eos quoque ad latera divergere atque ad omnes conclavis angulos penetrare debere. Propterea quod quælibet medii elaſtici particula, quando in ſtatum majoris condenſationis ſit reducta, non ſolum ſeſe ſecundum eam plagam, unde erat compreſſa, reſtituat, ſed etiam particulas vicinas quaquaverſus ad motum impellat. Cum igitur radii lucis in conclave per foramen intromiſſi objectum in una tantum directione repræſentent, neque id ubique in conclavi depingant; hinc concludit radios lucis non eo modo, quo ante propagationem pulſuum per medium elaſticum expoſuerat, diffundi.

§. XI. Neque vero hinc recte colligitur, diverſiſſimam eſſe rationem propagationis luminis ac ſoni. Nam ſi hunc caſum probe perpendimus, ne ſonus quidem in conclave per

per foramen intromiſſus, a ſua primitiva directione tantopere diffundi totumque conclave adimplere deprehendetur. Certum quidem eſt hoc caſu ſonum in omnibus conclavis angulis æquali fere vi exaudiri, quod in lumine ſecus evenit; ſed hinc nondum evincitur ſonum a foramine per totum conclave diſpergi, quod ita oſtendo. Corpus ſonorum perpetuo in ea directione judicamus, unde pulſus ſeu radii quaſi ſonori noſtras aures percutiunt, atque viciſſim iſti pulſus ex ea directione ad nos pertingere cenſendi ſunt, ubi corpus ſonorum exiſtere judicamus. Jam vero nemo in angulo conclavis ſedens corpus ſonorum in ipſo foramine collocatum judicabit, quod tamen fieri deberet, ſi ſonus a foramine per totum conclave diſpergeretur: ex quo luculenter ſequitur, ne ſonum quidem, poſtquam per foramen in conclave eſt ingreſſus, inde ſecundum omnes directiones diffundi.

§. XII. Deinde etiam ſonum non ideo in ſingulis conclavis angulis audiri, quod pulſus per foramen ingreſſi undique diffundantur, hinc manifeſto colligere licet, quod etiamſi foramen obturetur, ſonus nihilo minus ubique in conclavi fere æque fortis audiatur. Perceptio ergo ſoni non foramini debetur, multoque minus ejus diſperſioni, poſtquam per foramen ſit ingreſſus; quin potius hinc uti ex plurimis aliis obſervationibus cognoſcimus, ſonum per ipſos conclavis parietes penetrare, atque ob hanc cauſam ſenſum auditus excitare. Parietes ſcilicet atque muri reſpectu ſonorum ſimilia ſunt corpora, atque vitrum aliaque corpora pellucida reſpe-

ctu

ctu luminis. Similique modo ſonus in conclavi ubique exauditur, quo lumen quoque in conclavi, cujus omnes parietes eſſent pellucidi, ubique cerneretur.

§. XIII. Caſus igitur iſte a Neutono allatus nihil prorſus confert ad diſſimilitudinem inter propagationem lucis & diffuſionem ſonorum probandam. Nam ut utrinque par ratio fuiſſet, pro ſono ejusmodi conclave eligere debuiſſet, cujus parietes ſono non fuiſſent pervii; ita ut ſonus quoque nonniſi per foramen in conclave introitum habuiſſet. Hujusmodi ſcilicet conclave requireretur ad judicandum, utrum ſonus poſtquam per foramen eſt ingreſſus, in omnes plagas diffunderetur an non? Tale autem conclave parare ſummopere difficile videtur, ita ut hoc pacto quæſtio vix unquam deciſionem ſit impetratura. Interim tamen hinc tantum conſtat, iſtud argumentum plus ponderis ad evertendam eorum ſententiam, qui lumen ſimili modo quo ſonum per medium quodpiam elaſticum propagari ſtatuunt, non habere, quam id, quod primo loco eſt commemoratum.

§. XIV. Quamvis autem talis conclavis, quale deſcripſimus, conſtructio vires humanas prorſus ſuperaret, tamen aſſeverare auſim, experimentum ex voto ſucceſſurum, ſonumque in hujusmodi conclavi in ea ſolum directione, unde venerat, ſenſum auditus eſſe excitaturum; ſimilemque omnino futurum eſſe eventum ei, qui in radio lucis per foramen in cameram obſcuram intromiſſo obſervari ſolet. Si enim ſonus ſe in tali conclavi ad latera diffunderet, ob eandem

quoque

quoque rationem ſeſe in aperto aëre ubique quaquaverſus diſpergere deberet, quod cum in caſu poſteriori non eveniat, ne in priori quidem, etiamſi experimentum inſtituere non liceat, fieri poterit. Videmus enim in aëre aperto ſonum a corpore ſonoro undique ſecundum lineas rectas propagari, neque usquam ad latera deflecti. Cujus propagationis quæcunque ſit cauſa; neceſſe eſt, ut eadem quoque progreſſionem ſoni in conclavi ante memorato moderetur.

§. XV. Contra hanc quidem animadverſionem excipi poteſt, quod, cum aperto aëre ſonus circa corpus ſonorum quaquaverſus diffundatur, atque pulſus in aëre ſecundum omnes directiones propellantur; in quovis loco pulſus vicini impediant, quo minus quisque pulſus ſeſe ad latera expandat. Verum cum experientia teſte pulſus diverſorum ſonorum ſe mutuo non perturbent, ſed ſinguli ſæpe per eandem aëris particulam in ſua quisque directione propagentur; non liquet, quomodo uniuscujusque pulſus vis ſe reſtituendi ad latera a pulſibus contiguis coerceri poſſit. Quodſi ergo ejusmodi ideam propagationis pulſuum in medio elaſtico nobis fingamus, quæ cum phænomenis radiorum lucis conſiſtere nequeat, hoc ipſo iſta theoria propagationi ſoni adverſabitur, atque adeo a veritate abhorrens erit cenſenda.

§. XVI. His igitur duobus præcipuis fundamentis ſententiæ Neutonianæ, qua radii lucis inſtar effluviorum ex corporibus lucidis emanare ſtatuuntur, everſis, difficultates ſummas, quibus hæc ſententia laborat, paucis quoque comme-

moremus, quæ quidem ita ſunt comparatæ, ut nusquam tam dilutæ, quam autoritate allatorum argumentorum obrutæ videantur. Cum igitur his argumentis omnis vis ſit ademta, tantum abeſt ut iſtæ difficultates tolerari queant, ut potius huic ſententiæ omnem veriſimilitudinis ſpeciem detrahant. Quodſi radii lucis tamquam flumen continuum ex ſole emanent, neceſſe eſt, ut materia ſolaris inde detrimentum quodpiam patiatur, quod quamvis ob tenuitatem radiorum, quam fere in infinitum diminuere licet, quovis momento minimum concipiatur, tamen longo temporis tractu fieri omnino non poteſt, ut jactura non notabilem totius ſolis partem conſtituat, id quod ſequenti modo dilucide oſtendi poteſt.

§. XVII. Quoniam radii e ſole emanantes continuo divergunt, eorum denſitas decreſcet in ratione duplicata diſtantiarum a ſole. Ponamus ergo denſitatem radiorum in regione terræ ſe habere ad denſitatem materiæ, ex qua ipſe ſol conſtat uti n ad 1. Si jam radii a ſole ad terram intervallo 8 minutorum pertingere ſtatuantur, atque Parallaxis ſolis horizontalis 13″ aſſumatur, jactura, quam materia ſolis ſingulis minutis ſecundis patitur, ſecundum raritatem radiorum in regione terræ volumen implebit 100000000000 cubicorum radiornm terræ. Cum igitur volumen ſolis æquetur 1849880 cubicis radiis terræ, detrimentum, quod ſol ſingulis minutis ſecundis ob effluxum radiorum patitur, ſe habebit ad totam ſolis maſſam ut 54000 n ad 1.

§. XVIII.

§. XVIII. Si ergo materia radiorum in regione terræ quin quagies quater millies tantum rarior esset quam materia solis, unico minuto secundo universus sol in radios dissiparetur. Cum igitur ne plurimis quidem seculis detrimentum sensibile statui possit, necesse est ut raritas radiorum incomparabiliter minor sit, quam quinquagies quater millies. Scilicet si universa materia solis per 1 exponatur, erit jactura uno die facta = 4665600000 *n*, & unius anni jactura = 1704110400000 *n*; unde intervallo quinquies mille annorum jactura solis debebit esse = 8520552000000000 *n*, quæ cum vix sensibilis esse queat, oportet numerum *n* ad minimum centies majorem esse quam 8520552000000000, unde raritas radiorum in regione terræ circiter ad densitatem materiæ solaris se habere deberet ut 1 ad 1000000000000000000 hoc est ut unitas ad unum trillionem.

§. XIX. Etsi non ignoro, patronos emanationis radiorum in magnitudine hujus stupendi numeri nihil absurdi invenire, tamen non dubito, quin ob hoc ipsum ista opinio non parum de sua probabilitate apud æquos judices sit amissura. Interim tamen hoc argumentum ulterius non urgeo; sed hoc nullo modo mihi explicabile videtur, quomodo duo pluresve radii ex diversis regionibus tam incredibili celeritate sibi occurrentes se mutuo in motu non perturbent. Quando enim plurimi radii sive per minimum foramen in conclave obscuratum introgrediuntur, sive ope speculi vel vitri caustici in focum collecti se mutuo decussant, nulla

 pror-

prorſus alteratio in ſingulorum directione percipitur, cum tamen omnino fieri non poſſit, ut non frequentiſſimæ ſimulque vehementiſſimæ colliſiones eveniant. Hocque argumentum maximam vim habere videtur ad iſtam opinionem funditus evertendam.

§. XX. Deinde etiam, ſi radii lucis tanta rapiditate e ſole effluerent, natura corporum diaphanorum aliter explicari non poſſet, niſi in iis meatus rectilinei radiis tranſitum concedentes ſtatuantur. Cum autem radii ſecundum omnes directiones per corpora pellucida tranſire poſſe obſerventur, neceſſe eſſet, ut hæc corpora quaquaverſus ſecundum lineas rectas eſſent perforata, ita ut in iis nulla linea recta concipi queat, quæ non ſimul in hujusmodi meatu ſit poſita. Hinc nequidem materia ullum locum, ubi conſiſtat, hæcque corpora conſtituat, invenire, atque adeo nullo modo inter ſe cohærere poſſet; nam utcunque horum corporum materia diſpoſita concipiatur, fieri omnino non poterit, ut ſecundum omnes prorſus directiones meatus exiſtere ac patere queant.

§. XXI. Plures aliæ difficultates, quibus tam hæc opinio ipſa in ſe ſpectata, quam explicatio phænomenorum refractionis & colorum inde petita premitur, commemorari poſſent; ſed quoniam primaria, quibus ea innititur fundamenta ſunt everſa, ei refutandæ non ulterius immoror. Maximum enim firmamentum theoriæ, quam hic ſum expoſiturus, non tam in refutatione contrariæ ſententiæ, quam

in

in ſummo conſenſu meæ explicationis cum omnibus phænomenis quærendum videtur. Patebit autem hanc theoriam non ſolum cum experientia perfectiſſime conſpirare, ſed etiam nullis incommodis atque dubiis circa conſtitutionem corporum ullum locum relinqui; eamque adeo ſecum tam egregie conſtare, ut ſimplicitati naturæ convenientiſſima ac digniſſima videatur.

§. XXII. Lumen igitur ante omnia ſimili modo quo ſonum per medium quoddam elaſticum ope pulſuum propagari ſtatuo; atque cum ſonus potiſſimum per aërem diffundi ſoleat, lumen per aliud quoddam medium elaſticum, quod non ſolum atmosphæram noſtram, ſed etiam univerſum mundi ſpatium, quo ultimæ ſtellæ fixæ a nobis diſtant, impleat, propagari aſſumo. Cum enim lux a ſtellis fixis usque ad nos perveniat, quæcunque radiorum lucis ſit cauſa, neceſſe eſt, ut vaſtiſſimum hoc ſpatium materia quadam ſubtili ſit repletum; atque ut lumen per eam ſimili modo, quo ſonus per aërem transmitti poſſit, opus eſt ut iſta materia ſubtilis ſumma elaſticitate ſit prædita, quæ proprietas ſimul plurimis aliis corporum phænomenis explicandis inſervire poteſt.

§. XXIII. Hoc igitur medium, per quod lumen undique diffundi pono, non erit diverſum ab eo, quod apud philoſophos ætheris nomine conſideratur: quare uti ſonus per aërem, ita ſimili modo lumen per ætherem propagatur. Eſt ergo æther fluidum ſubtile elaſticum, quod omnia loca

in mundo ab aliis corporibus relicta adimplet; perinde atque aër circa terram in omnia loca, quæ ab aliis corporibus relinquuntur, penetrat. Utrum autem æther ſicut aër gravitate ſit præditus hic non definio: interim tamen veriſimillimum videtur, ipſam gravitatis cauſam in æthere eſſe quærendam, ideoque ætherem ipſum gravitate omni carere. Ipſa autem explicatio phænomenorum lucis pleniorem naturæ ætheris cognitionem nobis ſuppeditabit, quæ in univerſa phyſica eximium uſum habere, atque aditum ad profundiſſima naturæ myſteria aperire queat.

§. XXIV. Dum igitur organum ſenſus a corpore remoto mediante fluido quodam ſeu alio corpore idoneo interpoſito excitatur, tres res erunt perpendendæ. Primo ſcilicet in ipſo corpore, ex quo radii viſum afficientes originem habent, cujusmodi inſit motus, oſtendi debebit. Deinde explicari oportet, cujusmodi inde mutatio in medio interjecto oriatur, & quomodo ea ulterius ad ſenſoria noſtra usque propagetur. Tertio vero quamnam impreſſionem ipſum ſenſus organum hinc recipiat, & quemadmodum ſenſatio & objecti repræſentatio perficiatur, exponendum erit. Primum ergo contemplari oportebit objectum viſus, unde radii ad nos usque transmiſſi ſenſum afficiunt; ſecundo formatio & propagatio radiorum; ac tertio impreſſio, quæ in organo ſenſus excitatur, demonſtrari debebit.

Caput II.

Caput II.

De formatione ac propagatione pulſuum.

§. XXV.

Carteſius univerſum mundi ſpatium, per quod radii lucis propagantur, globulis ſuis ſecundi elementi repletum ſtatuerat, eosque perfecte duros fecerat. Cum igitur per experientiam conſtet, ſi ſeries hujusmodi globulorum in altero termino percutiatur, puncto temporis ictum in ultimum globulum transferri; ſimili modo radios lucis efformari exiſtimavit. In ſole enim aliisque corporibus lucidis ejusmodi perpetuam partium agitationem ponit, qua globuli ſecundi elementi continuo impellantur, atque impreſſionem in inſtanti ad longiſſima intervalla transferant. Tum temporis enim nondum erat compertum, lucem non in inſtanti, ſed ſimili modo quo ſonum, certo tempore per datum intervallum propagari.

§. XXVI. Si hoc phænomenum Carteſio innotuiſſet, fortaſſe globulos ſuos ſecundi elementi inter ſe non contiguos, ſed quam minimis intervallis a ſe invicem remotos ſtatuiſſet, ut quilibet, antequam proximum attingeret, per quoddam ſpatiolum promoveri debuiſſet, ſicque non difficulter ſucceſſivam lucis propagationem explicaviſſet. Verum tamen hæc explicatio alia maxima difficultate laborat, qua fit ut ea nullo modo admitti poſſit. Ut enim hæc propagatio

gatio ſecundum lineas rectas fiat, neceſſe eſt ut globulorum, per quos impulſus communicatur, centra ſint in directum poſita. At vero principiis geometriæ repugnat, plures globulos ita diſponi, ut ſecundum quamque directionem eorum centra ſint in lineis rectis conſtituta.

§. XXVII. Hac igitur explicatione repudiata in iſta inveſtigatione tutiſſime verſabimur, ſi ad ſoni propagationem attendentes ſimilem lucis propagationem concipiamus. Propagatur autem ſonus potiſſimum per aërem, qui eſt fluidum elaſticum, quod non ſolum ingenti vi ſeſe expandendi eſt præditum, ſed etiam a quovis impulſu ad majorem condenſationis gradum comprimi poteſt. Ejusdem indolis ergo ætherem quoque concipi conveniet, ita ut per eum lumen ſimili modo quo ſonus per aërem propagari cenſendum ſit. Quamobrem explicatio radiorum lucis ab indagatione naturæ fluidorum elaſticorum pendebit, quæ materia cum in mechanica ſit inveſtigatu difficillima, operam dabo, ut, quemadmodum per hujusmodi fluida pulſus producantur & propagentur, utcunque intelligatur.

Tab. V. Fig. 1. §. XXVIII. Quoniam ex natura ſoni novimus, in aëre pulſus excitari a corporis cujuscunque motu vibratorio, ſimili quoque modo in æthere cunctisque aliis mediis elaſticis ejusmodi pulſus generari recte concludimus. Quo igitur facilius hujusmodi pulſuum formationem repræſentare, & quemadmodum ii per medium elaſticum ulterius transferantur, intelligere queamus, ſit E A F corpus quaſi corda vibrans, quæ in punctis E & F fixa ad A usque diducatur, in quo ſtatu omnes

omnes medii elastici particulæ in recta A O sitæ naturali densitate atque elasticitate gaudeant. Cum primum autem corda in A dimittitur, dum ea excursionem suam usque in E *a* F absolvit, punctum A medii particulam adjacentem in *a* usque promovebit, atque adeo particulas medii ultra *a* positas magis condensabit; propterea quod particulæ, quæ ante per lineam A O erant distributæ, nunc in spatium minus *a* O sunt redactæ.

§. XXIX. Perspicuum autem est, cum corda in situm E *a* F pervenerit, medii elastici particulam *a* in statu maximæ condensationis versari, ideoque majori elasticitate præditam fore, quam reliquas particulas versus O sitas. Ultra *a* ergo condensatio particularum continuo decrescet, neque tamen ob elasticitatem non infinitam condensatio in infinitum usque interea pertingere potuit. Ponamus igitur effectum vibrationis sese ad B usque extendisse, ita ut, cum particulæ *a* condensatio sit maxima, sequentium particularum condensatio continuo fiat minor, donec in B sit densitati naturali æqualis: ultra B autem ad O usque omnis fluidi elastici materia adhuc in statu naturali tam densitatis quam elasticitatis versetur.

§. XXX. Jam sive corda in situ E *a* F permaneat sive recedat particula *a*, quoniam sequentibus majorem habet elasticitatem, sese expandet, & sequentes impellendo magis condensabit. Hoc modo densitas in *a* continuo decrescet, donec in statum naturalem restituatur: particula autem B impulsa non solum comprimetur, sed etiam promovebitur

 per

per ſpatium quoddam B b, ita ut in b nunc maxima compreſſio reperiatur. Interea autem, dum particula B in b transfertur, ſequentes particulæ quoque magis ultra ſtatum naturalem condenſabuntur, quæ mutatio ſe usque ad C extendat. Deinde ſimili modo, dum particula in b ſe relaxabit, punctum C ulterius promovebitur in c, hincque condenſatio ſeu pulſus ulterius in D propagabitur; Atque hoc modo impulſus initio in A factus continuo ulterius propagabitur, donec tandem ad ultimum terminum O pertingat.

§. XXXI. Hinc igitur apparet ſtatum maximæ compreſſionis, qui poſt cordæ vibrationem erat in a, ſucceſſive in loca ulteriora per lineam AO propagari; ſicque per ſingula puncta intermedia ad O usque transferri. Quamdiu ergo iſte pulſus ab a ad O transmittitur, ſeries particularum medii elaſtici in linea AO non erit in æquilibrio, ſed alicubi dabitur particula reliquis magis compreſſa ac propterea magis elaſtica. Particulæ autem utrinque adjacentes minus erunt compreſſæ, atque iſta compreſſionis inæqualitas ubique ſe non ultra datam diſtantiam extendet. Si enim uti oſtendimus maxima compreſſio ſit in puncto b, ſequentes particulæ ad C usque juſto plus erunt compreſſæ, quæ autem ultra C ſunt ſitæ, ea in ſtatu naturali verſabuntur: ſimili quoque modo retrorſum a b materia ad datam tantum diſtantiam extra ſtatum naturalem reperietur, ſiquidem nulla nova cordæ impulſio inſequatur.

§. XXXII. Dum itaque unus pulſus a cordæ vibratione per

per intervallum A*a* ortus propagatur per ſpatium A O, non ſimul ubique materia ſubtilis agitabitur, ſed continuatio impulſus perpetuo tantum in datæ magnitudinis loco inerit, extra quem materia elaſtica utrinque ſit in æquilibrio & in ſtatu naturali. Locus autem iſte, in quo ſtatus æquilibrii eſt ſublatus, proprie pulſus vocari ſolet; atque ideo quisque pulſus continuo ulterius continuatur, & quaſi unda in ſuperficie aquæ ita progreditur, ut ipſa materia non una ſimul devehatur, ſed tantum ſtatus majoris compreſſionis per ſingulas partes ſucceſſive transmigret. Interim tamen quælibet particula, dum pulſus in eo loco hæret, aliquantulum motu vero procedet recedetque; quem motum a motu ipſius pulſus probe diſtingui convenit.

§. XXXIII. Pulſus ergo quovis momento in linea A O certum quoddam ſpatium occupabit, in quo medii elaſtici particulæ in ſtatu præternaturali ſint conſtitutæ, ita ut extra hoc ſpatium particulæ medii naturalem denſitatem & elaſticitatem teneant. In ipſo igitur pulſu particulæ medii in continua erunt agitatione; dum enim aliæ ſe relaxant, aliæ magis condenſabuntur & aliquantillum promovebuntur, hincque ipſe pulſus ulterius transferetur. Quamobrem iſta explicatio duabus conſtabit partibus, in quarum altera ipſa pulſuum promotio, in altera vero particularum, in quibus pulſus hæret, agitatio definiatur. Fieri quidem poſſet, ut uterque motus eſſet maxime perturbatus; at cum agitatio particularum pro noſtro negotio ſit minima, univerſus motus mox ſe ad legem quamdam uniformem componet; cujusmodi

modi uniformitatem natura in omnibus motibus minimis constanter affectare solet.

§. XXXIV. Non solum igitur veritati consentaneum videtur, progressionem pulsuum esse uniformem & æquabilem, sed etiam experientia nos docet, sonum per aërem motu æquabili proferri. Quare cum difficillimum sit tam promotionem pulsuum, quam particularum agitationem ex solis principiis mechanicis a priori determinare, nostram investigationem non mediocriter sublevabimus, si cum Neutono assumamus, motum pulsuum esse uniformem, & cujusvis particulæ in pulsu agitationem similem esse motui penduli minimas oscillationes absolventis. Tum enim ex principiis mechanicis non solum nobis ostendere licebit, hujusmodi motum subsistere posse, sed etiam ejus quantitas & vera pulsuum celeritas assignari poterit.

§. XXXV. Methodus igitur, qua ad hoc negotium expediendum utemur omnino erit singularis, dum partim conjectationi partim certis mechanicæ principiis innititur. Conjectatione enim, quam quidem experientia confirmat, jam quasi cognitum assumimus, qualis futurus sit tum motus pulsuum, tum agitatio interna particularum. Theoria autem cum hac conjectura conjuncta primum quidem declarabit ejusmodi motum in fluido elastico inesse posse: præterea vero densitas & elasticitas materiæ subtilis ipsam speciem & magnitudinem hujus motus generatim assumti indicabit. Eandem viam ingressus est summus Neutonus in evolutione propositionis XLVII libri II Princ. ubi quoque celeritatem motus

motus pulſuum per fluidum elaſticum definivit, hincque propagationem ſoni derivavit; atque hoc artificio inveſtigationem alias difficillimam ad finem perduxit.

§. XXXVI. Veſtigia itaque Acutiſſimi Viri ſecuturus primum ejus enodationem difficillimæ iſtius quæſtionis, in prop. XLVII. libr. II. pertractatæ, quæ plerisque non parum obſcura videri ſolet, illuſtrabo, atque deinceps ad præſens inſtitutum accommodabo. Sint igitur A B & B C duæ particulæ minimæ fluidi elaſtici in linea recta A O ſitæ, quæ adhuc in ſtatu naturali verſentur. Ponatur $AB = BC = c$, ſitque denſitas naturalis fluidi elaſtici $= D$, & vis elaſtica $= E$. Æquetur autem hæc vis elaſtica ponderi cylindri, cujus altitudo $= k$, & qui repletus ſit materia gravi & æque denſa, ac eſt ipſum fluidum elaſticum. Etſi enim æther ſit gravitatis expers, tamen materiam gravem concipere licet, cujus denſitas æqualis ſit denſitati ætheris: eritque ergo vis elaſtica $E = Dk$, denotante Dk pondus cylindri, cujus altitudo $= k$ & denſitas $= D$. *Tab. V. Fig. 2.*

§. XXXVII. Ponamus jam præſenti inſtanti pulſum ad punctum B appuliſſe, atque adeo hoc punctum nunc primum ad motum incitari incipere. Propagetur autem pulſus per ſpatium $AO = a$ tempore T, ideoque pulſus ad punctum C pertinget elapſo tempore $\frac{c}{a}$ T; punctum A autem jam ad motum incitari cœpit ante tempus $\frac{c}{a}$ T. Elapſo au-

 tem,

tem, poſtquam pulſus punctum B attigerat, tempore t, ponamus punctum B per agitationem translatum eſſe in punctum b; & cum motus hic puncti ſimilis ſit motui penduli minimas oſcillationes peragentis, erit ſpatium Bb proportionale ſinui verſo cujusdam anguli, qui tempori t eſt proportionalis, ſit iſte angulus $= mt$, ac ponatur $Bb = \alpha$ ſinv. $mt = \alpha(1 - \cos mt)$.

§. XXXVIII. Quoniam vero ſingulæ particulæ, poſtquam ad motum impelli cœperunt, ſimili modo moventur, punctum A, quod jam per tempus $t + \frac{c}{a}T$ impulſum ſuſtinuit, nunc reperietur in a, ut ſit $Aa = \alpha(1 - \cos m(t + \frac{c}{a}T))$. Punctum autem C, cujus motus per tempus $t - \frac{c}{a}T$ duravit, translatum erit in c ut ſit $Cc = \alpha(1 - \cos m(t - \frac{c}{a}T))$. Hinc itaque erit $ab = Bb + AB - Aa$, & $bc = Cc + BC - Bb$, ideoque:

$$ab = c + \alpha \cos m(t + \frac{c}{a}T) - \alpha \cos mt$$

$$bc = c + \alpha \cos mt - \alpha \cos m(t - \frac{c}{a}T)$$

ſeu $ab = c - \alpha \cos mt + \alpha \cos mt . \cos \frac{mc}{a}T - \alpha \sin mt . \sin \frac{mc}{a}T$

& $bc = c + \alpha \cos mt - \alpha \cos mt . \cos \frac{mc}{a}T - \alpha \sin mt . \sin \frac{mc}{a}T$.

§. XXXIX.

§. XXXIX. Cum agitationes particularum in pulſu perpetuo ſtatuantur minimæ, intervalla ab & bc quam minime a magnitudine naturali $AB = BC = c$ diſcrepabunt, hinc erit α quantitas reſpectu c valde parva. Et cum intervallum c ſit quoque minimum, erit coſ $\frac{mc}{a} T = 1 - \frac{mmcc}{2aa} TT$ & ſin $\frac{mc}{a} T = \frac{mc}{a} T$. Unde fit $ab = c - \frac{\alpha mc}{a} T$ ſin mt — $\frac{\alpha mmcc}{2aa} TT$ coſ mt; & $bc = c - \frac{\alpha mc}{a} T$ ſin $mt + \frac{\alpha mmcc}{2aa} TT$ coſ mt. Denſitas ergo particulæ ab erit $= \frac{AB}{ab}$. $D = \frac{Dc}{ab}$ & vis elaſtica, quæ in mutationibus minimis rationem denſitatum ſequitur, erit $= \frac{Ec}{ab} = \frac{Dck}{ab}$. Simili modo particulæ bc denſitas erit $= \frac{Dc}{bc}$, & vis elaſtica $= \frac{Dck}{bc}$. Hinc exceſſus vis elaſticæ in ab ſupra vim elaſticam in bc erit $= \frac{Dck\,(bc - ab)}{ab.\,bc} = \frac{Dck}{ab.\,bc}.\ \frac{\alpha mmcc}{aa} TT$ coſ mt.

§. XL. Quia vero intervalla ab & bc quam minime diſcrepant ab eorum magnitudine naturali c, tuto in præſenti formula pro $ab.\,bc$ ſcribere licebit cc. Quo facto exceſſus vis elaſticæ particulæ ab ſupra vim elaſticam particulæ bc erit $= \frac{\alpha mm}{aa}.\ Dck\,TT$ coſ mt, hæcque erit vis, qua punctum b ulterius

terius versus O impellitur, & qua ejus motus acceleratur. Ad celeritatem autem puncti b, qua versus O progreditur, inveniendam, quæratur differentiale spatii $Bb = \alpha(1 - \cos mt)$ quod est $= \alpha m dt \sin mt$, hocque divisum per elementum temporis dt dabit celeritatem $= \alpha m \sin mt$, quæ sit debita altitudini v; ita ut sit $\sqrt{v} = \alpha m \sin mt$ & $v = \alpha^2 m^2 (\sin mt)^2$.

§. XLI. Inventa celeritate puncti b, quæ communis erit omnium punctorum particulæ ab, ejus incrementum, dum punctum b per spatiolum $\alpha m dt \sin mt$ progreditur, ex vi impellente $\frac{\alpha mm}{aa} Dck\,TT \cos mt$ definiri potest. Cum enim massa particulæ ab sit $= Dc$, erit ex principiis mechanicis $Dc.\, dv = \frac{\alpha mm}{aa} Dck\,TT \cos mt.\, \alpha m dt \sin mt$. At est $dv = 2\alpha^2 m^3 dt \sin mt. \cos mt$, quo valore substituto prodibit hæc æquatio.

$$2\alpha^2 m^3 Dc\, dt \sin mt. \cos mt = \frac{\alpha^2 m^3}{aa} Dck\,TT\, dt \sin mt. \cos mt;$$

unde elicitur $2 = \frac{kTT}{aa}$ & $\frac{a}{T} = \sqrt{\frac{k}{2}}$. Exprimit autem $\frac{a}{T}$ celeritatem, qua pulsus propagatur, quæ ergo tanta est, quanta per lapsum corporis gravis ex altitudine $\frac{k}{2}$ generatur.

§. XLII. Ex densitate igitur & elasticitate medii determinatur celeritas pulsuum, indeque definiri potest, quanto

tempore

tempore, datum ſpatium conficiatur. Ipſa autem agitatio ſingularum particularum in pulſu non determinatur, quia litteræ a & m e calculo exierunt, atque adeo indeterminatæ manent. Pendebit ſcilicet agitatio particularum ubique in pulſu a motu fluido elaſtico primum impreſſo, qui qualiscunque fuerit, perpetuo ſibi ſimilis conſervatur. Unde intelligitur, quomodocunque initio fluidum a corda aliove corpore fuerit percuſſum, ſive fortius ſive debilius, pulſus tamen nihilominus eadem celeritate propagari; quipqe quæ a ſola litera k ſeu ab elaſticitate ad denſitatem applicata pendet. Hoc ipſum quoque experientia conſtanter teſtatur, qua ſoni fortiſſimi, uti tormentorum, eadem celeritate propagari obſervantur, ac ſoni maxime debiles.

§. XLIII. Hinc, cum aeris tam denſitas quam elaſticitas ſit cognita, celeritas pulſuum in aere excitatorum atque adeo celeritas, quo ſonus propagatur, aſſignari poterit. Si enim elaſticitas aeris ponderi columnæ mercurialis 30 digitos altæ æqualis eſt, quia mercurius ratione gravitatis ſpecificæ ſe habet ad aquam uti 13593 ad 1000 & aqua ad aerem ſecundum Neutonum ut 870 ad 1 vis elaſtica aeris æqualis erit ponderi columnæ aereæ, cujus altitudo $= 30.13, 593.870$ digit. anglicorum, hoc eſt 29565 ped. Angl. ſeu 28678 Ped. Rhen. Hinc erit $k = 28678$ ped. Rhen. & $\frac{1}{2}k = 14332$ Ped. Corpus autem ex tanta altitudine delapſum acquirit celeritatem, qua ſingulis minutis ſecundis percurrere valet ſpatium 947 ped. Rh. ſeu 975 ped. Angl. Neutonus autem, quia aſſumſit mercurium ſe habere ad aquam ut $13\frac{2}{3}$ ad 1, invenit ſpatium 979 ped. uno minuto ſecundo abſolvendum.

§. XLIV. Quamvis autem experientia majorem soni celeritatem indicet, quippe qua constat sonum minuto secundo spatium 1100 pedum circiter percurrere, tamen quæcunque hujus discrepantiæ sit causa, dubitare non licet, quin celeritates pulsuum per diversa media elastica propagatorum inter se teneant rationem subduplicatam altitudinum k. seu cum sit $k = \frac{E}{D}$, erit in quovis medio elastico celeritas pulsuum in ratione subduplicata composita ex directa elasticitatis & inversa densitatis medii. Ceterum quia supra in expressione vis elasticæ $\frac{Dck(bc - ab)}{ab.\ bc}$, loco $ab.bc$ posuimus cc. qui valor justo est major, vim elasticam assumsimus nimis parvam, quæ si aliquantillum major statuatur, prodibit quoque major pulsuum celeritas; unde manifestum est, theoriam ipsam cum experientia magis conspirare, quam conclusionem vero tantum proximam inde deductam.

§. XLV. Quanquam methodus, qua hic post Neutonum sum usus, est indirecta, atque a perfecta theoria pulsuum in fluido elastico propagatorum longissime remota, tamen inde celeritates pulsuum, qui in diversis mediis elasticis excitantur, recte inter se comparari poterunt: propterea quod ipsa pulsuum celeritas non pendet ab agitatione particularum, ad quam determinandam principia adhuc cognita mechanica fortasse non sufficiunt. Quare cum celeritas soni seu pulsu-

um

um in aere excitatorum sit cognita, eadem pro omni alio medio elastico, cujus tam densitas quam elasticitas respectu aeris est nota, assignari poterit. Si igitur ponamus ætherem m vicibus rariorem, & n vicibus magis elasticum aere, erit celeritas, qua pulsus in aere propagantur, ad celeritatem qua pulsus in æthere propagantur ut 1 ad $\sqrt{mn}$.

§. XLVI. Si ergo valores litterarum m & n essent cogniti, celeritas luminis seu pulsuum in æthere excitatorum inde possit definiri. Cum autem neque densitas ætheris neque elasticitas etiamnunc ex experimentis colligi potuerit, celeritas autem luminis satis exacte sit cognita; hinc vicissim valor formulæ $\sqrt{mn}$, atque ideo insignis ætheris indoles cognosci poterit. Lumen autem a sole ad nos pertingere observatum est intervallo circiter 8′ & quia sonus intervallo 1″ conficit spatium 1040 ped. Paris. ideoque tempore 8′ spatium 500000 ped. paris. circiter: celeritas soni se habebit ad celeritatem luminis uti intervallum 500000 ped. paris. ad distantiam terræ a sole, eandemque rationem tenebit 1 ad $\sqrt{mn}$.

§. XLVII. Assumamus semi-diametrum terræ $= 19615791$ ped. Paris. & posita parallaxi solis horizontali 13″. fiet distantia terræ a sole $=$ 15866 semid. terræ $= 311234300000$ ped. Hinc itaque erit:

$1 : \sqrt{mn} = 5 : 3112343$

ergo $\sqrt{mn} = 622468$, unde reperietur

$mn = 387467100000$.

 Si

Si ergo raritas ætheris esset cognita, simul constaret, quoties ejus elasticitas esset major, quam elasticitas aeris: atque vicissim ex ætheris elasticitate concludi posset ejus densitas. Quoniam vero in motu planetarum plurium seculorum spatio nulla sensibilis motus diminutio observatur, necesse est, ut densitas ætheris sit quam minima ac fortasse plus quam 100000000 vicibus minor, quam densitas aeris.

§. XLVIII. In dissertatione sequente de relaxatione motus planetarum a resistentia ætheris oriunda hoc argumentum fusius discussi, ostendique ut planetarum motus ab omni sensibili perturbatione salvari possint, sufficere si densitas ætheris 387367100 vicibus minor statuatur aere; neque etiam observationibus vis infertur, si ea adhuc notabiliter major statuatur. Hinc ergo pro elasticitate ætheris vis remanet ad minimum millies major quam vis elastica aeris, nihilque obstaret, quo minus ea bis vel etiam ter millies major assumeretur. Tanta autem vis elasticitatis abunde sufficiens videtur omnibus phænomenis, quæ vulgo vi elasticæ ætheris adscribuntur, explicandis, cujusmodi sunt durities corporum, eorumque elasticitas.

§. XLIX. Quod enim ad duritiem corporum attinet, ex experimentis vim elasticam ætheris, si non exacte definire, tamen limites assignare poterimus, quos certe superet. Eligatur enim corpus durissimum, ex eoque fabricetur cylindrus tenuis, cujus basis verbi gratia sit scrupulum quadratum pe-

dis

dis rhenani ſeu $\frac{1}{1000000}$ ped. quadr. & quæratur pondus, quo iſte cylindrus in directum protractus divelli queat, quod pondus ſit $= P$ libr. Cum jam preſſio aeris in hanc baſin æquetur ponderi voluminis aquæ $\frac{3\,2}{1000000}$ pedum cubicorum, ea valebit $\frac{2240}{1000000}$ libras. Quare cum P effectus ſit vis elaſticæ ætheris, erit vis elaſtica ætheris ad minimum $\frac{100000\ P}{224}$ vicibus major, quam elaſticitas aeris; ſi quidem pondus P in libris exprimatur.

§. L. Pluribus autem hujus generis experimentis examinatis elaſticitas ætheris nunquam millies major prodiit quam elaſticitas aëris, ſed perpetuo multo minor. Neque vero adhibita fuerunt corpora duriſſima, neque æther in totam baſin preſſionem ſuam exerit, ſed in eam tantum partem, quæ ipſi eſt impervia. Quamobrem valor literæ n minor quam 1000 aſſumi non poteſt: poſito autem $n = 1000$ fiet $m = 387467100$ ſeu fere 400000000, quem numerum quoque in indagatione motus planetarum a reſiſtentia ætheris perturbati adhibui, oſtendique inde tantum effectum reſultare non poſſe, ut obſervationes adverſarentur.

§. LI. Ex his igitur intelligitur, quemadmodum pulſus in æthere formentur & ad longiſſimas diſtantias propagentur. Simili enim modo, quo in aëre, ſi a corpore tre-

 mulo

mulo percutiatur, pulſus excitantur & propagantur, ita quoque ad pulſus in æthere excitandos neceſſe eſt, ut is alicubi a quapiam vi percutiatur, ibique de ſtatu æquilibrii deturbetur; ſic enim ſublatio æquilibrii pulſum efficiet, qui ſeſe quaquaverſus ulterius propagabit: eodem nimirum modo ſecundum omnes directiones, quo id ſecundum unam evenire debere oſtendimus. Atque hujusmodi pulſus ad oculum usque propagatus nervos ſimili quodam modo afficiet, ſicque ſenſum viſus excitabit. Quanquam autem ad hoc ſucceſſio frequentiſſima pulſuum requiritur, tamen ex effectu uniuscujusque cunctorum effectus judicari debet.

§. LII. Deinde etiam vidimus pulſum, poſtquam ſemel eſt formatus, in directum promoveri, ſiquidem medium fuerit uniforme; unde ſimul rectitudo radiorum lucis intelligitur. Ipſa autem pulſuum promotio oritur ab agitatione particularum medii elaſtici, ubi pulſus verſatur, quæ cum ubique ſecundum determinatam directionem vergat, pulſui ſecundum eandem plagam motum inducit. Hinc ergo omnino evaneſcit difficultas Neutoni ſupra commemorata, quod per hanc theoriam lux per foramen in conclave obſcurum intromiſſa undiquaque diffundi deberet. Ob eandem enim rationem, cur pulſus ad latera declinaret, retro quoque reverti deberet, quod tamen tam theoriæ quam experientiæ adverſatur. Atque adeo hoc ex ipſa Neutoni theoria manifeſto ſequitur, unde eo magis mirandum, quod iſtam pulſuum propagationem ad lumen explicandum tanquam ineptam repudiaverit.

Caput III.

De pulsuum successione atque radiis lucis.

§. LIII.

Hactenus unicum tantum pulsum, eumque primum, qui a corpore vibrante medio elastico imprimitur, sumus contemplati; ita ut medium, antequam hunc pulsum accepisset, in perfecta statuatur tranquillitate. Post primum ergo pulsum, cum jam medii status æquilibrii sit perturbatus, effectus sequentium vibrationum definiri nequit, nisi prius ostendatur, in quonam statu medium a pulsibus antecedentibus sit relictum. Vel enim partes medii, dum secundum impulsum sustinent, jam se iterum ad statum æquilibrii composuerunt, vel adhuc in quapiam agitatione persistunt: si prius eveniat, secunda vibratio atque etiam quælibet sequentium, medium eodem prorsus modo ad motum ciebit, quo prima, atque pulsus a sequentibus vibrationibus orti pari velocitate propagabuntur: sin autem posterius locum haberet, pulsus sequentes longe aliter se habituri essent, atque priores, eoque magis perturbari deberent, quo plures jam antecessissent.

§. LIV. Medio autem elastico a prima vibratione certa motus seu virium quantitas imprimitur, quæ cum quaquaversus ad maximam distantiam diffundatur, & perpetuo eadem quantitas conservari debeat, fieri certe non potest, ut

in

in particulis, per quos pulſus jam tranſiit, motus perſeveret. Hoc enim modo a vi admodum exigua, quæ primam impreſſionem effecit, motus maximus produceretur, quod cum principiis motus nullo modo conſiſtere poſſet. Ex quo ſequitur, quam primum pulſus ex quovis loco ad ſequentia fuerit progreſſus, tam ibi quam in omnibus locis præcedentibus particulas fluidi elaſtici in ſtatu quietis & æquilibrii relinqui.

Tab. V. Fig. 2. §. LV. Hoc etiam ex ratiocinio ante adhibito luculenter ſequitur. Poſuimus enim elapſo tempore t, poſtquam pulſus punctum B attigerat, ſpatium $B b = \alpha (1 - \cos m t)$, per quod id interea a vi pulſus ſit promotum: unde conſtat punctum B per datum tantum ſpatium de loco ſuo naturali depelli, ad quam maximam diſtantiam pertinget, elapſo tempore $t = \frac{\pi}{m}$ denotante π angulum 180°, quo fit $\cos m t = -1$ & $B b = 2 \alpha$. Dehinc rurſus ad locum ſuum naturalem revertetur, quem attinget elapſo tempore $t = \frac{2\pi}{m}$; ibique ejus celeritas erit nulla. Unde quia in eundem ſtatum, in quo initio verſabatur, redit, nullamque novam impreſſionem a tergo recipit, penitus quieſcet. Videtur quidem expreſſio $B b = \alpha (1 - \cos m t)$ perpetuam puncti B agitationem innuere: at probe notandum eſt, calculum tantum proxime ad veritatem accedere, neque propterea nimis longe extendi poſſe.

§. LVI.

§. LVI. Clarissime autem hoc evincit experientia sonorum: constat enim a corda vibrante totidem vibrationes in aures deferri, quot aëri sint impressæ; hincque perspicuum est, pulsus a vibrationibus sequentibus excitatos ab antecedentibus non impediri. Deinde etiam statim atque cordæ motus vibratorius sistitur, subito quoque perceptio soni cessat, ita ut ultima vibratio, postquam pulsus ab ea excitatus organum auditus excitaverit, nullam agitationem in aëre relinquat, quæ sensus movere posset. Si igitur tale medium elasticum unicam vibrationem sustineat, pulsus inde ortus ubique in spatio datæ magnitudinis continebitur, atque data cum celeritate propagabitur, ita ut medium extra eum locum, ubi pulsus quovis momento hæret, ubique in statu quietis reperiatur.

§. LVII. Nisi igitur secunda vibratio citius insequatur, quam vicinæ medii particulæ iterum in statum naturalem pervenerint, ea perinde ac prima medium in statu tranquillo inveniens pulsum excitabit & propagabit eadem celeritate; idemque usu veniet in tertia & sequentibus vibrationibus. Ad punctum ergo O totidem pervenient pulsus, iisdemque temporis intervallis a se invicem distincti, quot in initio impressæ fuerint vibrationes: hoc tantum discrimine, quod singuli pulsus tanto tardius ad O appellant, quantum tempus requiritur ad spatium ab initio A usque ad O absolvendum: sic si in initio centum vibrationes medium uno minuto secundo percusserint, eæque æquis a se invicem intervallis

diſtent, ad punctum O quoque uno minuto ſecundo centum pulſus eodem ordine deferentur; ſed hoc eveniet tanto elapſo tempore, quantum ad ſpatium AO conficiendum requiritur.

§. LVIII. Quia ergo quælibet vibratio in medio elaſtico perinde pulſum generat, ac ſi eſſet ſolitaria, neque vel aliæ anteceſſerint, vel aliæ ſequantur; medium elaſticum ad omnis generis vibrationes, ſive ſint magis ſive minus frequentes, recipiendas æque erit accommodatum; dummodo vibrationes non ſint adeo frequentes, ut pulſus inter ſe confundantur. Ita novimus ſonos graviſſimos, qui dato tempore pauciores pulſus per aërem transmittunt, æque propagari atque acutiſſimos. Neque ergo ipſæ medii elaſtici particulæ motum vibratorium recipiunt, quem ob vim ſuam elaſticam retinere & continuare queant, ſed quælibet particula a quovis ictu quaſi unicam agitationem recipit, quæ diutius non durat, quam pulſus tranſeat, & penitus ceſſat, antequam pulſus ſequens appellat.

§. LXI. Hanc cujusque medii elaſtici indolem preſſius inculcare neceſſe erat, quoniam Vir Celeb. De Mairan aliam longe diverſam opinionem tuetur. Statuit enim unamquamque medii elaſtici particulam tanquam cordam tenſam, ad certum tantum motum vibratorium recipiendum eſſe aptam, ita ut, niſi corpus tremulum ſimili motu vibratorio cieatur, ea particula prorſus non afficiatur. Hinc in aëre ad omnis generis ſonos explicandos, omnis quoque generis particulas, quæ ratione elateris inter ſe diſcrepent, contineri

exiſti-

existimat, atque cujusque soni propagationem ita exponit, ut non omnes aëris particulæ, sed eæ tantum, quæ ad similem motum vibratorium sint instructæ & quasi consonæ, incitentur, reliquis tranquillis manentibus. Ita ut si ejusmodi sonus edi posset, qui in aëre particulas consonas non inveniret, is prorsus propagari, ideoque exaudiri nullo modo posset.

§. LX. Nostra quidem theoria jam ita videtur confirmata, atque cum ad explicationem phænomenorum progrediemur, ita extra omnem dubitationem collocabitur, ut inconvenientia istius novæ sententiæ satis perspiciatur. Interim tamen ne ullus dubio locus reliquatur, annotari conveniet, hujusmodi medium, quod ex particulis tam diversis elasticitatis gradibus præditis sit conflatum, nullo modo consistere posse. Particulæ enim, quæ reliquis magis essent elasticæ, sese expandendo vimque suam elasticam diminuendo ceteras comprimerent, neque ante hæc mutua actio cessaret, quam omnes ad eundem elasticitatis gradum fuissent redactæ. Ex quo perspicuum est tale medium, quale Vir Celeb. concipit, nullo prorsus modo existere posse.

§. LXI. Deinde etiamsi existentia hujusmodi medii concedatur, tamen per eam id, quod intenditur, minime obtinebitur. Cum enim quælibet particula non ab infinitis aliis, sed paucis tantum, puta 13, si sint æquales & rotundæ, immediate tangatur, atque harum particularum ratione elasticitatis innumerabiles dentur diversæ species, non solum eadem

particula ab alia ejusdem indolis non tangetur, sed plerumque ingens intervallum inter binas consonas proximas erit interjectum, quo casu, quomodo altera ab altera moveri possit, concipi nequit; propterea quod intermediæ dissonæ immotæ manere statuuntur. Sin autem hæ simul impellerentur, nulla esset ratio, cur & hæ non quoque suum motum vibratorium aliis sibi consonis inducerent, sicque perpetuo omnes soni simul audirentur.

§. LXII. Ut autem id, in quo tota hujus doctrinæ vis est posita, paucis attingam, fieri nullo modo potest, ut particula quantumvis elastica fluido elastico quasi infinito cincta, si ad motum impellatur, motum oscillatorium recipiat. Quoniam enim motum suum cum particulis adjacentibus communicat, hæque eum ulterius transferunt, ille motus statim extingui debebit, neque motui penduli oscillantis similis esse poterit, quod nulla obstacula offendit. Quin potius talis particulæ motus comparari debebit cum motu penduli, quod in fluido æque gravi & denso versatur, tale autem pendulum neutiquam oscillationes ordinatas absolvet. Hac igitur idea eversa nostra theoria eo firmius consistet, unde naturam radiorum, uti in æthere existunt, diligentius sum examinaturus.

Tab. V. Fig. 3. §. LXIII. Sit igitur in A ejusmodi corpus, quod motu suo tremulo in æthere pulsus excitet, ac primo quidem sint istius corporis vibrationes isochronæ, quarum uniuscujusque tempus sit $= \theta$, eodem autem tempore pulsus in æthere propagetur per spatium $= c$. Pulsus ergo a prima vibratione

tione excitatus, dum vibratio secunda fit, erit in Bb, ita ut sit $AB = c$, elapso autem tempore 2θ, duo in æthere pulsus Bb & Cc existent, quorum hic primæ vibrationi, ille vero secundæ originem debet, ita ut sit $AB = BC = c$. Simili modo post tempus 6θ, primus pulsus pervenerit in Gg, secundus in Ff, tertius in Ee, quartus in Dd, quintus in Cc & sextus erit in Bb, atque singula intervalla AB, BC, CD, DE, EF & FG inter se erunt æqualia & $= c$, Hinc ergo intelligitur, quomodo post quodvis tempus pulsus in æthere sint dispositi, & quomodo se invicem continuo ulterius insequantur. Qui uti æqualibus intervallis inter se distant, si vibrationes corporis in A fuerint isochronæ, ita inæqualiter a se invicem erunt remoti, si vibrationes non sint isochronæ.

§. LXIV: Cum pulsus ubique eadem celeritate progrediantur, secundum arcus circulares, quorum centrum est in puncto A, incurvabuntur, quemadmodum in figura sector circularis G A G portionem ætheris hujusmodi pulsibus excitatam repræsentat. In hoc ergo sectore quælibet linea recta AG per centrum A ducta exhibebit radium lucis, qui propterea omnes pulsus normaliter secat, atque ubique in pulsibus agitatio particularum fit secundum directionem radiorum. Hinc radiorum directio ex positione pulsuum est æstimanda, ita ut, si pulsus in G organum visus afficiat, radius lucis secundum directionem ad pulsum G G normalem advenisse judicetur. Radii ergo in æthere eatenus tantum existunt, quatenus lineæ rectæ ad pulsus normales ibi concipi-

untur: quia autem pulſus ſecundum hanc ipſam directionem agunt, & progrediuntur, eo ipſo radiorum effectus percipitur & intelligitur.

§. LXV. Præter directionem radiorum autem, ſecundum quam ſenſus viſus excitatur, in ipſis imprimis pulſuum frequentia eſt conſideranda, quippe quibus duabus rebus natura cujusque radii continetur. Ubi enim pulſus appellunt, atque organum viſus afficiunt, quoniam ſenſus ab ictibus pulſuum excitatur, perceptio a duabus rebus pendebit: primum ſcilicet a directione, ſecundum quam iſti ictus perficiuntur, tum vero a numero ictuum, qui dato tempore oculum percutiunt. Manifeſtum autem eſt, ubicunque oculus fuerit conſtitutus, totidem ictus ad eum pervenire, quot vibrationes corpus in A eodem tempore abſolverit. Aſſumimus hic vibrationes has eſſe iſochronas: quod ſi autem inæqualibus temporis intervallis edantur, tum inſuper hæc ipſa intervallorum inæqualitas novum diſcrimen in radiorum conſtitutionem inferet.

§. LXVI. Ex ipſa autem celeritate pulſuum eorumque frequentia, quæ ex numero vibrationum dato tempore editarum æſtimatur, diſtantia pulſuum, ſeu intervallum c, quo bini pulſus proximi a ſe invicem diſtant, definiri poteſt. Ponamus enim quemvis pulſum uno minuto ſecundo ad diſtantiam $= a$ propelli, atque corpus in A uno minuto ſecundo abſolvere i vibrationes, erunt ſingula intervalla A B, B C, C D, &c. ſeu quantitas $c = \frac{a}{i}$. Cum autem ſupra

inventa

inventa ſit celeritas ſoni ad celeritatem lucis ut 5 ad 3112343, ſonus autem uno minuto ſecundo per ſpatium 1040 ped. diffundatur, erit diſtantia $a = 647367344$ ped. unde etiamſi in A adeo 1000000 vibrationes abſolverentur, diſtantia tamen inter duos pulſus proximos ſexcentos pedes ſuperaret.

§. LXVII. Prouti igitur pulſus vel æqualibus vel inæqualibus intervallis inter ſe diſtant, radios diſtinguemus in ſimplices & compoſitos. Simplices ſcilicet erunt radii, qui ex pulſibus æquidiſtantibus oriuntur, ac quorum proinde ictus ſucceſſivi in organum viſus æqualibus temporis intervallis ſe invicem excipiunt; hujus generis porro innumerabiles dantur ſpecies pro ictuum numero, qui dato tempore in oculum irruunt: ſic cujusque ſpeciei natura aptiſſime difinietur per ictuum numerum, qui verbi gratia uno minuto ſecundo abſolvuntur. Aliter enim ſenſus afficietur a radio, qui oculum millies uno minuto ſecundo percutit, atque aliter a radiis, qui eodem tempore vel plures vel pauciores ictus invehunt: ſimili ſcilicet modo hi radii inter ſe discrepabunt, quo ſoni graviores & acutiores, quorum ratio ex numero vibrationum dato tempore editarum dijudicatur.

§. LXVIII. Radios autem compoſitos vocamus, qui pulſibus conſtant non æqualibus temporibus ſe invicem inſequentibus, ſeu qui oriuntur a vibrationibus non iſochronis Ratio hujus appellationis, quæ minus congrua videri queat, cum nulla compoſitio hic appareat, tum iſto nititur fundamento, quod hoc genus radiorum priori, cui nomen a ſim-

plicitate

plicitate petitum imposuimus, tanquam oppositum spectamus, tum vero, ne diversitate verborum a Neutono recedamus. Revera autem, si duo pluresve radii simplices in unum coalescant, similem fere effectum, atque radius compositus, producent; quemadmodum consonantia plurium sonorum sensum auditus æque afficit, ac si una corda motu tremulo non uniformi cieretur. Hujus autem generis radiorum compositorum infinities plures dantur species, quam prioris, cum hic tam intervalla pulsuum ipsa, quam eorum inæqualitas discrimen inferat.

§. LXIX. Mox autem ostendemus radios, quos hic vocamus simplices, in organo visus sensum eorundem colorum excitare, quos Neutonus simplices appellare solet, & qui in iride spectantur. Radii vero compositi eos colores, quos Neutonus vocat compositos, repræsentare docebuntur. Quin etiam, etsi hujusmodi radii ab unico motu vibratorio oriri possunt, tamen ii per refractionem ita distorquentur, ut plures radios simplices exhibeant; quam proprietatem Neutonus radiis tantum compositis tribuit. Naturam ergo radiorum tam simplicium quam compositorum penitius inspicere licebit, cum refractionis rationem explicaverimus, cui negotio sequens caput est destinatum. Hic autem ostendisse sufficiat, omne radiorum discrimen tum in pulsuum se invicem insequentium intervallis, tum in ratione æqualitatis vel inæqualitatis & ordinis, quem inter se tenent, esse positum.

§. LXX. Moneri hic quoque posset, vim seu violentiam,

tiam, qua medii elaſtici particulæ in pulſibus agitantur, discrimen in radiorum indole creare poſſe: nullum enim eſt dubium, quin organum viſus a pulſibus violentioribus fortius incitetur, quam a debilioribus. At vero hoc modo radiorum natura immutari nequit; æque parum atque ſoni, qui ratione intervallorum pulſuum conveniunt, inter ſe discrepare judicari ſolent, etiamſi alii ſint aliis fortiores. Idem quoque experientia luculenter teſtatur; conſtat enim radium ſimplicem, verbi gratia rubrum perpetuo, utcunque diverſimode infringatur, eundem colorem rubrum repræſentare. Nemo autem dubitabit, quin in tranſitu per media refringentia vis agitationis in pulſibus haud mediocriter imminuatur. Totum itaque discrimen hinc oriundum in eo conſtabit, quod color ruber magis minusve vivide exprimatur, qua differentia natura coloris non immutari judicatur.

Caput IV.

De reflexione & refractione radiorum.

§. LXXI.

Cum leges reflexionis corporum elaſticorum ſatis ſuperque ſint explicatæ ac demonſtratæ, reflexio radiorum nulla laborat difficultate; ſive enim radii lucis ex corporibus lucidis actu ejaculentur, ſive per medium elaſticum propagentur, eorum reflexio æque facile intelligitur. Requiritur ſcilicet ad hoc ſuperficies elaſtica, ad quam ſi pul-

ſi pulſus appellant, particulæ in agitatione conſtitutæ motum ſuum ita reflectere cogantur, ut angulus reflexionis æqualis ſit angulo incidentiæ; agitatione autem particularum ſic immutata neceſſe eſt, ut pulſus eandem mutationem ſubeant. Unde perſpicuum eſt, radios lucis per reflexionem aliam alterationem non pati, niſi ratione directionis, veramque indolem & celeritatem pulſuum nullam mutationem perpeti.

Tab. V. Fig. 4. §. LXXII. Quo autem ratio reflexionis melius perſpiciatur, ponamus in ſuperficiem planam reflectentem OR incidere conum luminoſum ACQ, cujus radii extremi ſint AC & AQ, quarum linearum directiones per reflexionem mutabuntur in CF & QS, ita ut ſit ACO = FCR & AQO = RQS. Productis ergo lineis FC & SQ ad concurſum *α*, poſt reflexionem pulſus perinde erunt diſpoſiti, ac ſi venirent a puncto *α*. Nempe cum ante reflexionem pulſus eſſent B*b*, C*c*, poſt reflexionem pulſuum poſitio erit D*d*, E*e*, F*f*, ſimilique modo propagabuntur, ac ſi ex puncto *α* eſſent egreſſi, conusque luminoſus eſſet F*α*S. Neque ergo per reflexionem intervalla pulſuum, neque eorum æqualitas ſeu inæqualitas turbabitur, ita ut in organo viſus eundem effectum producere debeant, ac ſi nulla reflexio accidiſſet; ſola directione excepta.

Tab. VI. Fig. 5. §. LXXIII. Ad refractionem explicandam concipiamus conum ætheris luminoſum ſeu pulſibus agitatum, qui ex diſtantia quaſi infinita ſit ortus, ita ut is pro cylindro LP*pl* haberi

haberi queat, in quo dentur pulſus Mm, Nn, Pp, ad quorum directionem radii normales cenſeantur. Repræſentabit ergo iſte cylindrus faſciculum infinitorum radiorum lucis, qui rectis LP & lp ſint paralleli, atque ad pulſus Mm, Nn, Pp perpendiculares. Singuli igitur hi pulſus per ætherem uniformi & cognita celeritate eſſent progreſſuri, niſi obſtaculum vel aliud medium diverſæ ab æthere naturæ invenirent. Non ſolum autem iſti pulſus in directum propagarentur, ſed etiam eadem inter ſe intervalla eſſent conſervatura, ita ut radii ſecundum lineas rectas & motu æquabili promoveri eſſent cenſendi.

§. LXXIV. Ponamus nunc in ADB exiſtere aliud medium, per quod quidem pulſus propagari queant, ſed quod vel ratione denſitatis vel elaſticitatis ab æthere ita diſcrepet, ut pulſus per id minori celeritate propagentur; ſitque AB ſuperficies iſtius medii. Sit celeritas pulſuum in æthere ad eorum celeritatem in hoc altero medio ut μ ad ν, atque pervenerit pulſus Pp jam ita ad ſuperficiem AB, ut punctum P eam attingat, p vero etiamnum ab ea ſit remotum. Pulſus ergo punctum P ingredietur in medium ADB, dum punctum p adhuc extra id verſatur, atque interea dum punctum p ad ſuperficiem in π appellit, illud punctum P jam penetraverit ad Π usque, eritque ſpatium PΠ ad ſpatium $p\pi$ in ratione celeritatum hoc eſt ut ν ad μ; ideoque totus pulſus Pp, poſtquam in medium ADB intraverit, ſitum habebit $\Pi\pi$, cui præcedentes pulſus, qui jam ante intra-

 verunt,

verunt, Qq, Rr, Ss, &c. erunt paralleli: ita ut radii in hoc medio secundum rectas PS, πs his pulsibus normales dispositi censeri debeant.

§. LXXV. Primum igitur patet, pulsum Pp, qui ex medio ACB in alterum medium ADB oblique intrat, situm sibi parallelum conservare non posse; si enim linea $\Pi\pi$ ipsi Pp esset parallela, tum quoque intervallum $P\Pi$ æquale foret intervallo $p\alpha$, ideoque celeritas pulsus in utroque medio foret eadem, quod est contra hypothesin. Hançobrem positio pulsus $\Pi\pi$ in medio ADB erit inclinata ad ejusdem pulsus positionem Pp in altero medio ACB. Dum igitur positio pulsuum transitu in aliud medium variatur, directio radiorum, quæ ad pulsus normalis est, tantumdem immutabitur; ideoque radii, cum in medio ACB directionem tenuissent LP, nunc in medio ADB secundum directionem PS erunt constituti, quæ linea ad pulsus $\Pi\pi$, Qq, Rr, Ss est normalis; atque ipsi pulsus nunc secundum directionem PS progredientur, quæ directionis inflexio vocari solet refractio.

§. LXXVI. Quanta autem futura sit ista directionis inflexio ex ratione celeritatum $\mu : \nu$ facillime colligitur: cum enim sint spatia $p\pi$ & $P\Pi$ uti celeritates μ ad ν, anguli autem ad p & Π sint recti, propterea quod pulsus secundum directionem ad sui positionem normalem progrediuntur, si linea $P\pi$, quæ utriusque trianguli $Pp\pi$ & $P\Pi\pi$ est hypotenusa communis, instar sinus totius consideretur, erit $p\pi$ sinus anguli $pP\pi$ & $P\Pi$ sinus anguli $P\pi\Pi$. Quamobrem erit

erit finus $p P \pi$ ad finum $P \pi \Pi$ ut μ ad ν: ducta autem per punctum P recta CD ad superficiem AB normali, erit angulus $LPC = p P \pi$ & angulus $SPD = P \pi \Pi$, ideoque habebitur

$$\sin LPC : \sin SPD = \mu : \nu.$$

Directio ergo radiorum incidentis LP & inflexi PS ita mutabitur, ut angulorum, quos hi radii cum perpendiculari CD constituunt, finus fint inter se ut celeritates radiorum.

§. LXXVII. In opticis autem angulus LPC incidentiæ, & SPD angulus refractus vocari folet, unde erit finus anguli incidentiæ ad finum anguli refracti, ut celeritas pulfuum per medium ACB ad celeritatem pulfuum per medium ADB. Quare fi ambo media maneant eadem, radii autem diverfæ obliquitatis incidere confiderentur, erit perpetuo eadem ratio inter finus angulorum incidentiæ & refractionis. Quod phænomenum cum in omnibus refractionibus conftantisfime obferveтur, quoniam tam plane & luculenter per noftram theoriam explicatur, ejus veritatem maxime confirmat. Quanquam enim non ignoramus, per alias quoque theorias hoc idem phænomenon falvari, tamen confequentia plerumque minus videtur naturalis, & quod caput rei eft, ampliffima quædam & conftantiffima lex naturæ non adimpletur.

§. LXXVIII. Qui enim refractionem non ex fuis principiis, fed ex hac lege naturæ, qua natura omnes effectus per viam breviffimam exequi ftatuitur, explicaverunt, re-

ctissime statuerunt, radium, qui ex puncto L ad punctum S fit perventurus, ejusmodi viam eligere debere, secundum quam tempore brevissimo ex L ad S pertingeret. Per methodum maximorum ac minimorum autem inflexio viæ, dum radius ex medio A C B in medium A D B intrat, ita comparata reperitur, ut sinus anguli L P C esse debeat ad sinum anguli D P S, ut celeritas radii in medio A C B ad ejusdem celeritatem in medio A D B; quam eandem proportionem theoria nostra statim suppeditavit. Non solum ergo per hanc theoriam proprietas refractionum evidentissime explicatur, sed etiam lex naturæ gravissima conservatur.

§. LXXIX. Quantumvis egregie ista refractionis explicatio experientiæ satisfacit, tamen diversa radiorum refrangibilitas a Neutono primum detecta huic theoriæ minus favere videtur. Radii enim rubri minus de via sua declinare observantur, quam cærulei: quare cum refractio a celeritate pendeat, radiorum rubrorum per medium A D B transeuntium celeritas major esse deberet quam cæruleorum. Supra autem ostendimus celeritatem propagationis pulsuum non ab eorum intervallis, sed tantum a densitate & elasticitate pendere; hincque ergo omnis generis radii, quibuscunque intervallis pulsus a se invicem distent, parem refractionem pati deberent. Neque vero aliæ theoriæ hunc nodum felicius solvunt, atque adeo Neutoniani diversam attractionis vim radiis tribuere coguntur; quæ sententia cum aliunde

 satis

ſatis ſit refutata, non opus eſt, ut ex hoc capite ejus inconvenientia oſtendatur.

§. LXXX. Quodſi autem principia noſtræ theoriæ ſupra expoſita diligentius proſequamur, non ſolum diverſam radiorum refrangibilitatem explicare poterimus, ſed etiam eam, etiamſi per experientiam nondum conſtaret, quaſi a priori elicere poſſemus. Ubi enim ſupra celeritatem pulſuum definivimus, expreſſe monuimus, eam ad unicum tantum pulſum ſpectare, atque pro pluribus valere non poſſe, niſi quatenus ſinguli pulſus ab inſequentibus non perturbentur. Si igitur perpendamus, quid evenire debeat, quando pulſus tam prope ſe invicem inſequuntur, ut ſequentes in præcedentes agere poſſint: facile perſpiciemus, hac actione celeritatem pulſuum aliquantum augeri debere. Quodſi enim agitatio particularum, quæ pulſum M m conſtituit, ſeſe usque ad pulſum N n extendat, neceſſe eſt ut iſte pulſus N n celerius propellatur, quam ſponte ſua, niſi hæc nova vis acceſſiſſet, progrederetur.

§. LXXXI. Quo preſſius ergo pulſus ſe invicem inſequuntur, eo magis eorum celeritas ſuperabit eam, quam ſupra pro pulſibus ſolitariis invenimus Si igitur celeritas pulſus ſolitarii in medio A C B exprimatur per μ, diſtantia autem pulſuum ſucceſſivorum ſeu intervallum M N vel M P ſit $= c$; erit celeritas horum pulſuum ſucceſſivorum major quam μ, puta $\mu + M$, exiſtente M ejusmodi functione ipſius c, quæ creſcat, dum c decreſcit. Ponamus uno minuto

ſecundo

secundo edi i pulsus, atque litteram μ exprimere spatium, quod pulsus solitarius uno minuto percurrere valeat, erit $c = \frac{\mu}{i}$ seu $c = \frac{\mu + M}{i}$ ob auctam jam celeritatem pulsuum. Cum autem hoc celeritatis augmentum sit minimum, tuto assumere licet $c = \frac{\mu}{i}$, eritque M ejusmodi functio ipsius $\frac{\mu}{i}$, quæ crescat decrescente c, seu crescente i. Ex quo erit M functio quæpiam ipsius $\frac{i}{\mu}$, quæ uti i crescit vel decrescit, simul crescat vel decrescat.

§. LXXXII. Etsi indoles hujus functionis non est cognita, tamen quæcunque ea sit, quoniam est minima, phænomena perinde se habebunt. Sit igitur $M = \frac{\alpha i}{\mu}$: & cum celeritas radii in medio A B C sit $= \mu + \frac{\alpha i}{\mu}$, celeritas in medio A D B erit ob similem rationem $= \nu + \frac{\alpha i}{\nu}$. Quibus valoribus tanquam veris loco μ & ν substitutis, prodibit sinus anguli incidentiæ C P L ad sinum anguli refracti D P S ut $\mu + \frac{\alpha i}{\mu}$ ad $\nu + \frac{\alpha i}{\nu}$, hoc est ob terminos $\frac{\alpha i}{\mu}$ & $\frac{\alpha i}{\nu}$ minimos uti μ ad $\nu + \frac{\alpha i(\mu\mu - \nu\nu)}{\mu\mu\nu}$. Refractio ergo revera præter naturam utriusque medii insuper pendebit a frequentia pulsuum

pulſuum i: atque differentia inter ſinus angulorum CPL & DPS eo minor erit, quo major fuerit numerus i ſeu pulſuum frequentia. Perſpicuum ergo eſt, quomodo refrangibilitas variare, & quomodo theoria noſtra cum experimentis Neutonianis conſiſtere poſſit.

§. LXXXIII. Primum igitur refractio eo erit major, quo magis celeritates radiorum in utroque medio diſcrepent: atque ſi pulſus in utroque medio pari celeritate progrediantur, refractio erit nulla, quia facto $\nu = \mu$, etiam quantitates $\mu + \frac{\alpha i}{\mu}$ & $\nu + \frac{\alpha i}{\nu}$ inter ſe fiunt æquales. Deinde vero manente ratione μ ad ν eadem, refractio eo erit minor, quo frequentiores fuerint pulſus. Si enim ſit $\mu > \nu$ erit $\nu + \frac{\alpha i(\mu\mu - \nu\nu)}{\mu\mu\nu} > \nu$, ideoque ad μ propius accedit quam ν; atque ſi ſit $\mu < \nu$ erit $\nu + \frac{\alpha i(\mu\mu - \nu\nu)}{\mu\mu\nu} < \nu$; ideoque denuo ad μ propius accedit quam ν. Ex quo perſpicitur, eos radios minus eſſe refrangibiles, qui majore pulſuum frequentia conſtent: eos autem, in quibus minor pulſuum frequentia inſit, majorem refractionem pati: perpetuo autem refractionem eſſe minorem, quam ſi unicus pulſus ſolitarius ex uno medio in alterum tranſiret.

§. LXXXIV. Experientia autem conſtat radios, qui minimam refractionem patiuntur, in oculo colorem rubrum repræſentare, eos autem, qui maxime ſint refrangibiles, co-

lorem violaceum exhibere. Viciſſim ergo hinc intelligitur, radios, qui ſenſum coloris rubri excitant, quos Neutonus ſimpliciter radios rubros vocat, majori pulſuum frequentia conſtare, atque adeo eodem tempore ſæpius ſenſum viſus percutere, quam radios violaceos. Diverſitas igitur colorum, uti jam ſupra innuimus, a numero pulſuum, qui dato tempore in oculum incurrunt, pendet; ideoque inter radios diverſorum colorum ſimilis differentia intercedit, atque inter ſonos ratione gravis & acuti differentes. Color ſcilicet ruber cum ſonis acutioribus, violaceus autem cum ſonis gravioribus erit comparandus; reliqui vero colores, uti flavus, viridis & cœruleus medium quoddam tenebunt, atque cum ſonis intermediis comparari debebunt.

§. LXXXV. Cum igitur radii diverſorum colorum, dum ex uno medio in aliud diverſæ indolis tranſeunt, diverſimode refringantur; manifeſtum eſt, ſi in medio A C B duo pluresve radii diverſorum colorum inter ſe fuerint paralleli atque in ſuperficiem AB oblique incidant, eosdem, dum in alterum medium ingrediuntur, parallelismum non amplius conſervare poſſe, atque adeo a ſe invicem divergere debere. Scilicet ſi radiorum celeritas per medium ACB major fuerit quam per medium ADB, radii rubri poſt refractionem cum perpendiculari PD majorem angulum conſtituent, quam violacei. Ideoque hi radii cum ante in medio ACB eſſent contigui & quaſi conjuncti, nunc in medio A D B a ſe invicem ſeparabuntur. Nihilo tamen minus, ſi ex hoc medio

in

in aliud priori A C B simile per superficiem ipsi A B parallelam immergantur, denuo inter se fient paralleli; quod ex formulis supra datis facile colligitur.

§. LXXXVI. Hujusmodi autem diversa refrangibilitas in singulis radiis tam ex sole, quam aliis corporibus lucidis egressis observatur. Dum enim cylindrus radiorum solis tenuissimus L P *p l* in superficiem refringentem A B oblique incidit, in eo post refractionem perpetuo separatio radiorum diversicolorum deprehenditur. Hinc Neutonus quemlibet radium lucis tanquam fasciculum omnium diversicolorum radiorum simplicium repræsentat, qui in medio A D B diversimode refracti a se invicem separentur & dissolvantur, uti in §. præc. est ostensum. At vero hujusmodi fasciculorum fabrica ubique tam æquabilis nimis a simplicitate naturæ abhorrere videtur, quam ut admitti posset. Quin etiam cum pulsus a motu vibratorio quodam oriantur, nullus motus ejusmodi concipi potest, unde hujusmodi fasciculi radiorum in æthere generentur.

§. LXXXVII. Ex experientia ergo tantum constat, pulsus, qui radios solis constituunt, non omnes æqualibus intervallis inter se distare, sed alios magis alios minus a se invicem esse remotos, hancque inæqualitatem adeo in radio quovis tenuissimo locum habere. Quæ igitur hujus phænomeni vera sit causa, facilius intelligere poterimus, si ad eas solis particulas, unde pulsus in æthere originem trahunt, perspiciamus. Cum autem hujusmodi pulsus a motu vibratorio

proficiſcantur; neceſſe eſt ut particulæ ſolis, eæ ſaltem quæ circa ejus ſuperficiem hærent, in continuo verſentur motu vibratorio, unde quælibet particula iſto motu in æthere generabit pulſus vibrationibus conformes. Quare cum hi pulſus modo magis modo minus a ſe invicem diſtent, ſequitur motum vibratorium non ubique eſſe uniformem; ſed a celerioribus vibrationibus oriri pulſus frequentiores, a tardioribus minus frequentes, atque hujusmodi vibrationum inæqualitatem in quavis minima ſolis portione locum habere.

§. LXXXVIII. Si igitur quælibet ſolis particula vibrationes iſochronas ederet, ſuperficies ſolis repleta eſſe deberet particulis diverſæ indolis, quarum aliæ citius aliæ tardius vibrationes ſuas abſolverent. Neque vero tantum iſtæ variæ particulæ per totam ſolis ſuperficiem ſtatui deberent diſperſæ, ſed etiam in quibusvis minimis portionibus tam æquabiliter inter ſe permixtæ, ut quaſi ex quovis ſolis puncto omnium colorum radii egrediantur. At vero minime probabile videtur, hujusmodi æquabilem diverſarum particularum permixtionem in ſole admitti poſſe, cum ob ſummum calorem omnes particulæ in continua verſentur agitatione, ita ut in ſingulis locis modo hujus, modo alius ſpeciei particulæ abundare deberent. Quocirca hanc explicationem tanquam legibus naturæ minus congruam, æque ac faſciculos ante commemoratos merito repudiamus.

§. LXXXIX. Relinquitur ergo, ut ſingulæ particulæ ſuas vibrationes non iſochronas habeant, ita ut eadem particula

modo

modo celerius modo tardius agitetur; id quod veritati maxime consentaneum videtur. Cum enim tam in omni igne, quam præcipue in sole motus intestinus impetuosissimus insit, quo singulæ particulæ continuis quasi explosionibus incitentur, motus vibratorius, qui hinc unicuique imprimitur, isochronus esse nequit. Namque omnia corpora, quæ ad motum reciprocum recipiendum sunt apta, oscillationes tantum minimas isochronas peragere solent; quando autem fortius impelluntur, initio oscillationes celerius sese insequuntur, quam cum vis jam remittitur, motusque sensim ad isochronismum reducitur. Confirmatur hoc exemplo cordæ tensæ, quæ nimis ruditer percussa initio sonum acutiorem edere solet, quam sub finem motus.

§. XC. Quoniam ergo in sole singulæ particulæ summa vehementia agitantur, ejusdem particulæ vibrationes, cum primum est percussa, incitatiores erunt, ideoque in æthere frequentiores pulsus producent, quam tum, cum motus jam relaxatur. Radii ergo solares, quia pulsibus non æquidistantibus constant, ad genus radiorum compositorum pertinent, atque ad modum figuræ 6. erunt comparati. Pulsus scilicet P *p* & O *o* a primis vibrationibus profecti sibi erunt propiores, quam pulsus I *i* & H *h*, qui a motu vibratorio jam relaxato sunt orti. Cum autem in sole ista agitatio perpetuo duret, quælibet particula singulis momentis denuo incitabitur: ita si pulsus H*h* fuerit ultimus, quem particula, antequam de novo impellatur, produxit, post eum *Tab. VI. Fig. 6.*

iterum

iterum pulſus frequentiores ſequentur, qui autem pedetentim fient rariores, quoad particula, unde oriuntur, rurſus novam impulſionem accipiat; hocque modo conſtitutio radiorum ſolarium veriſimillima, & legibus naturæ convenientiſſima videtur.

§. XCI. Quando ergo hujusmodi radius compoſitus in aliud medium A B oblique intrat, & refractionem ſubit, pulſus propiores P *p*, O *o*, minus refringentur, quam remotiores I *i*, H *h*, ideoque a ſe invicem ita ſeparabuntur, ut ſe invicem non amplius in linea recta inſequantur. Hinc ergo quaſi ex uno radio plures radii per refractionem naſci videbuntur, quorum alii magis, alii minus erunt inclinati ad rectam in P ad A B normaliter ductam. In illis autem, qui ab hac perpendiculari magis erunt remoti, pulſus erunt frequentiores, in his autem rariores. Quanquam autem in his radiis ſeparatis pulſus ſunt interrupti, tamen quia in eodem radio H *h p* P mox idem pulſuum ordo recurrit, atque pulſus a radiis ex vicinis ſolis particulis orti loca vacua pulſibus ſuis ſupplere poſſunt, ex uno radio compoſito plures radii ſimplices imo innumeri orientur, quorum illi, qui a perpendiculari maxime recedunt, colorem rubrum, qui vero eo proxime accedunt, colorem violaceum repræſentabunt.

§. XCII. Hoc ergo modo ratio illius vulgatiſſimi phænomeni perſpicue intelligitur, quo quiſque radius ſolaris per refractionem in plures radios coloratos reſolvi obſervatur.

Qua-

Quare cum radius hujusmodi compoſitus & nondum refractus colorem album præ ſe ferat, manifeſtum eſt colorem album non a radiis ſimplicibus, ſed compoſitis proficiſci, in quibus frequentia pulſuum ſit varia, atque intervalla pulſuum tam minora, quæ colorem rubrum, quam majora colorem violaceum efficientia, atque ſingula intermedia, æqualiter inter ſe permixta & ſibi certo quodam ordine ſuccedentia contineantur. Hinc ergo ex radiis colorem album repræſentantibus per refractionem omnes radiorum ſimplicium ſpecies elicere licet, qui tam colores extremos, rubrum & violaceum, quam omnes intermedios exhibeant.

§. XCIII. Pendet ergo color candidus, qualem ſol præ ſe fert, a certa variorum inter pulſus intervallorum permixtione: atque ideo ſi iſta permixtio immutetur, ut alia intervalla reliquis ſæpius occurrant, color candidus alterabitur, atque ad eum colorem, quem intervalla abundantia exhiberent, accedet. Ita ſi agitatio particularum in corpore lucido minus fuerit vehemens, ut intervallorum majorum numerus prævaleat, color repræſentabitur ad cœruleum accedens. Hujusmodi colore tincta videtur flamma ſpiritus vini, atque infima pars flammæ candelæ; ex aliis autem experimentis conſtat flammam ſpiritus vini minus eſſe efficacem, ideoque agitationem particularum minus eſſe vehementem. Simili modo in flamma candelæ, agitatio in ejus parte infima ſine dubio eſt minima; in ſupremo autem apice, ubi eſt

maxima

maxima, color cernitur rubicundus; inde enim ob maximam agitationem minora pulſuum intervalla præ reliquis abundare debent.

§. XCIV. Hæc igitur omnia phænomena theoriam noſtram mirifice confirmant, cum non ſolum ei non repugnent, ſed etiam tam naturaliter ex ea neceſſario conſequantur. Quamvis ergo circa propagationem pulſuum, quam ob defectum ſcientiæ non ex primis motus principiis derivare licuit, nonnulla adhuc dubia ſupereſſe poſſent, tamen iſte inſignis cum experientia conſenſus ea nunc facile tollet: quoniam in phyſica evenire non poteſt, ut falſa theoria tam egregie & tam naturaliter cum phænomenis conſpiret. Reliqua autem phænomena, quæ nondum attigimus, veritatem hujus theoriæ extra omnem dubitationem penitus collocabunt.

Caput V.

Caput V.

De corporibus lucentibus, reflectentibus, refringentibus & opacis.

§. XCV.

Corpora lucentia seu lucida sunt, quæ ipsa per se, etiamsi ab aliena luce non illuminentur, radios emittunt, visuique se spectanda præbent. In his ergo corporibus vehementissimam inesse oportet particularum saltem in superficie positarum agitationem, qua istæ particulæ in continuo motu vibratorio constituantur, unde in æthere pulsus, hincque radii excitentur. Hujusmodi autem agitationem revera in igne, qui inter corpora lucida primum locum tenet, existere, ceteræ proprietates dilucide declarant; effectus enim caloris & combustionis, nisi talis agitatio particularum concedatur, nullo modo concipi potest. Quin igitur in sole, stellis fixis, aliisque corporibus lucentibus ejusmodi particularum agitatio vehementissima insit, omnino dubitari nequit.

§. XCVI. Interim tamen causæ lucis & caloris a se invicem ita discrepant, ut in eodem corpore sæpe non utraque simul, sed alterutra tantum inesse deprehendatur. Dantur enim corpora tam calida, ut etiam urant, sine lumine; & contra inveniuntur corpora lucentia, uti lignum putrefafactum, & nitedula, quæ lucent, etiamsi nullo sensibili calore

ſint prædita. Quanquam autem tam ad lucem, quam ad calorem agitatio particularum requiritur, tamen agitatio ſatis vehemens in quopiam corpore ineſſe poteſt, ſine particularum motu vibratorio; atque viciſſim ſingulæ partes in motu vibratorio conſtitutæ eſſe poſſunt, cum tamen inter ſe non agitentur; quorum illud ad calorem, hoc vero ad lumen producendum ſufficit. Plerumque tamen, ſi particulæ ad motum vibratorium recipiendum ſint idoneæ, maxima agitatio ſimul cum calore & lumine conjuncta erit.

§. XCVII. Quoties ergo corpus lucens videmus, tuto concludere licet, ejus particulas in motu vibratorio eſſe conſtitutas; ſimili modo quo particulæ campanæ, cujus clangorem audimus, motum vibratorium habere recte judicantur; utrum autem in eodem corpore ſimul inſit ejusmodi particularum commotio, qua calor efficitur, pro certo affirmare non licet, niſi lux ſit vehementiſſima. Veriſimile enim non eſt particulas ſummo vibratorio motu concitari poſſe, quin eæ ſimul ita inter ſe agitentur, ut calor efficiatur. Color porro lucis varius eſſe poteſt, prout particularum motus vibratorius fuerit concitatior vel remiſſior; imprimis autem cum vibrationes ob vehementem incitationem non ſunt iſochronæ, prout alia atque alia intervalla prævaleant: quemadmodum in capite præcedente eſt notatum, & in ſequentibus, ubi in colores corporum diligentius inquiremus, fuſius exponetur.

§. XCVIII. Quoniam hic corpora ſecundum ſenſum viſus

visus spectamus, corpora lucida merito ad primam classem referuntur, quoniam ipsa per se sensorium afficiunt. In classem autem secundam conjiciemus corpora reflectentia, quæ radios in se incidentes, uti ostendimus, ita reflectunt, ut angulus reflexionis æqualis sit angulo incidentiæ. Hæc ergo corpora ita sunt comparata, ut pulsus, qui in ea incidunt, aliam impressionem non faciant, nisi qua ipsi singuli in debita directione repellantur. Hinc istorum corporum particulæ ipsæ in nullum motum vibratorium proprium constituuntur, neque propterea alias ætheris particulas commovere valent, nisi quæ appulerint. Ad hoc autem perfecta requiritur elasticitas, quod ipsum ex corporibus per polituram ad reflectendum aptis redditis facile colligere licet.

§. XCIX. Per reflexionem igitur sola radiorum incidentium directio mutatur, indolesque eorum, scilicet pulsuum frequentia, neutiquam afficitur. Quocirca radii reflexi non id corpus, unde reflectuntur, sed id, ex quo primum erant egressi, visui repræsentant; ac primo quidem si superficies reflectens fuerit plana, objectum eadem figura cernitur, secundum aliam directionem. Sin autem superficies reflectens fuerit convexa vel concava, figura objecti vel augetur vel diminuitur vel distorquetur, uti in catoptricis demonstrari solet. Hinc si corporis cujuspiam superficies fuerit perfecte reflectens, nullamque ipsa opacitatem habeat, id corpus revera se ipsum nunquam spectandum præbet, cum visui alia tantum corpora, quorum radios excipit & reflectit,

ctit, repræsentet. Similis nempe corporum radios reflectentium ratio est, atque eorum, quæ sonos repercutiunt & per echo reddunt.

§. C. Tertia corporum, ratione visionis, classis continet corpora, quæ radios refringunt, iisque transitum præbent, quæ propterea diaphana seu pellucida appellantur. Hæc ergo corpora ita sunt comparata, ut pulsus exceptos non solum non reflectant, sed etiam cum partibus suis interioribus communicent, atque adeo, uti in æthere fieri ostendimus, per suam substantiam propagent. Hujusmodi corpora sunt aer, aqua, vitrum, crystallus & adamas; per experimenta autem constat, radium ex vacuo, seu potius æthere proprio radiorum vehiculo, in aerem incidentem propius ad perpendicularum refringi, ex quo recte concluditur, pulsus in aere minori celeritate propagari, quam in æthere. Atque simili modo ex refractione aquæ, vitri, crystalli & adamantis celeritas radiorum in his corporibus adhuc minor colligitur, quam in aere.

§. CI. In capite præcedente, ubi naturam refractionis exposuimus, hæc corpora tanquam ætheri similia & tantum ratione densitatis & elasticitatis diversa sumus contemplati. Neque vero hujusmodi idea cum veritate consistere potest; primum enim in his corporibus ingens ætheris copia inest: tum vero tanta est eorum densitas, ut ad ætheris puri densitatem rationem fere habeat infinitam: ac præterea partes horum corporum ita inter se sunt connexæ, ut agitationes,

quæ

quæ in iis contingunt, longe aliam ſequantur legem, atque in æthere. Etſi autem ob tantam iſtorum corporum denſitatem celeritas radiorum debeat eſſe minima, tamen partium minimarum conjunctio, qua fit, ut quaſi in inſtanti impreſſiones receptæ transferantur, celeritatem multo majorem, & non multum a celeritate in æthere discrepantem efficere debebit.

§. CII. Si igitur pulſus ad hujusmodi corpus pertingit, ejus extremas particulas aliquantillum comprimit; hæcque compreſſio ſtatim transfertur ad particulas interiores, quæ eandem ulterius communicant, quoad corpus extenditur. Atque cum iſta pulſuum translatio ſimili modo, quo in æthere, eveniat, ea ſecundum lineas rectas fieri debet; poſtquam ſcilicet refractio in introitu ſemel eſt facta. Ad corpus ergo diaphanum ſeu pellucidum requiritur, ut non ſolum ejus ſingulæ particulæ compreſſionem pati queant, ſed etiam ut inter ſe ita ſint connexæ, ut aliæ ſuam compreſſionem cum aliis communicare & ſecundum lineas rectas transferre poſſint. Unde niſi & particulæ ſingulæ hujusmodi fuerint indolis, & eo modo inter ſe connexæ, uti commemoravimus, corpus pelluciditate carebit.

§. CIII. Corpus igitur pellucidum perinde atque reflectens ſe ipſum nobis ſpectandum non offert, niſi quatenus particulas continet opacas, quibus ſenſus eo modo excitatur, uti deinceps explicabimus: ſed corpora pellucida nobis alia corpora, quorum radios transmittunt, repræſentant. Atque adeo quicquid videmus, id non per radios æthereos, ſed

per plura media diaphana ſpectamus. Primum enim radii per aerem ad nos pertingunt, &, etiamſi per alia corpora pellucida externa nullam novam refractionem patiantur, tamen in oculum ingreſſi triplicem refractionem in humoribus aqueo, cryſtallino & vitreo ſubeunt; quibus fit ut radii ex uno objecti puncto exeuntes in fundo oculi iterum in unum punctum colligantur, viſio nemque diſtinctam efficiant; quæ, niſi iſta collectio eveniret, eo magis confuſa foret, quo majus ſpatium radii ex eodem puncto egreſſi in fundo oculi implerent.

§. CIV. Per refractionem autem primum radii, niſi in ſuperficiem corporis refringentis normaliter incidant, de ſua directione deflectuntur; quæ deflexio, etſi nova refractione reſtituatur, tamen fieri poteſt, ut objecti vel major vel minor imago nobis repræſentetur, cujusmodi mutatio in teleſcopiis & microſcopiis deprehendi ſolet. Deinde quanquam radiorum ſimplicium indoles non alteratur, tamen quoniam radii rubri minorem refractionem patiuntur, quam cœrulei & medii, hinc diſtorſio objectorum variis coloribus tinctorum oritur. Radii autem compoſiti, in quibus varia ineſt pulſuum frequentia, cujusmodi ſunt radii ſolis & corporum lucidorum, per refractionem in plurimos radios ſimplices reſolvuntur; hæcque ſeparatio eo magis fit ſenſibilis, quo major fuerit refractio & quo obliquius radii inciderint.

§. CV. Reſtat igitur quarta corporum claſſis explicanda, quæ omnia corpora opaca in ſe complectitur; eaque a tribus præcedentibus claſſibus maxime eſt diverſa. Corpora

pora enim ſecundæ & tertiæ claſſis per ſe non cernuntur, prorſusque ſunt inviſibilia, niſi cum particulis opacis ſint permixta. Sic aerem, qui eſt corpus maxime pellucidum, nunquam ſpectare licet, niſi vaporibus ſit impraegnatus, nebulamque exhibeat: aquam vero & cryſtallum, etſi ſunt corpora pellucida, tamen viſu contuemur & dignoſcimus: unde aere minus pellucida ſunt judicanda. Omnia ergo corpora, quæ ipſa viſu percipimus vel ad primam vel ad quartam claſſem pertinent: diſcrimen autem in hoc verſatur, quod corpora primæ claſſis per ſe, quartæ claſſis autem non, niſi a corporibus primæ claſſis illuminentur, videre queamus: ita ut ſi corpora primæ clasſis e mundo tollerentur, ſimul quarta clasſis inviſibilis redderetur.

§. CVI. Cum viſus nonniſi radiorum ope excitari posſit, quando corpora opaca cernimus, neceſſe eſt, ut ab iis radii ad oculos noſtros pertingant. Hoc ergo tantum evenit, ſi iſta corpora a ſole vel alio corpore per ſe lucente illuminentur; noctu autem vel in loco obſcuro corpora opaca ſenſum viſus plane fugiunt, unde in hoc ſtatu nulli radii ab illis ad oculos noſtros mittuntur. Hancobrem omnes fere philoſophi ſtatuerunt, corpora opaca per reflexionem radiorum conſpicua reddi, quæ ſententia eo magis probabilis videbatur, quod cum nonniſi illuminata ſenſum viſus afficiant, radii alieni, qui in ea incidiſſent, alio modo hunc effectum producere non poſſent, niſi inde reflexi ad oculos noſtros dirigerentur. Ita lunam & planetas, cum ſint corpora

pora opaca, & nobis, nisi a sole illuminentur, inconspicua, censuerunt radiis a sole inde ad nos reflexis conspici; similique modo corpora opaca terrestria radios, qui in ea incidissent, reflectere, sicque organum visus excitare.

§. CVII. Si hæc explicatio vera esset, corpora opaca ad classem secundam referri deberent, quippe ad quam omnia corpora retulimus, quæ radios reflectunt. At vero hic statim maximum se prodit discrimen, quoniam corpora reflectentia non se ipsa, sed ea objecta, unde radios acceperunt, conspicienda præbent, cum tamen nullum sit dubium, quin corpora opaca ipsa videamus. Hinc ergo evidentissime sequitur, corporum opacorum & reflectentium diversissimam esse rationem, neque propterea eidem classi annumerari posse. Deinde autem supra vidimus, per reflectionem indolem radiorum non mutari, ideoque si corpora opaca radios solis tantum reflecterent, iidem radii in oculos nostros incurrere deberent; neque propterea diversis coloribus ullus locus relinqueretur. Cum igitur a corporibus rubris radii tantum rubri, & a violaceis violacei ad nos pertingant, etiamsi radii albi in ea incidissent, manifestum est istam transmutationem a sola reflectione proficisci non posse.

§. CVIII. Neutonus igitur cum animadvertisset diversitatem colorum in ipsis radiis esse sitam, in superficie corporum quoque refractionem quandam fieri existimavit, qua radii omnium colorum incidentes in simplices resolvantur, horumque ea tantum species, quæ cum colore corporis conveniat,

veniat,

veniat, reflectatur, reliquæ vero ſpecies abſorbeantur. Cum autem tam reflexio quam refractio ab obliquitate radiorum incidentium pendeat, explicari hinc nullo modo poteſt, quomodo fiat, ut a ſuperficie corporis, ex. gr. rubri, undecunque radii venerint, perpetuo ſoli radii rubri non modo reflectantur, ſed etiam quaquaverſus diffundantur: ex quocunque enim loco corpus rubrum aſpiciatur, rubrum apparet. Quæ cum non ſolum ſint explicatu difficillima, ſed etiam principiis viſionis e diametro repugnent, ſequentem explicationem, quæ his difficultatibus non eſt obnoxia, naturæ maxime conformem eſſe confido.

§. CIX. Ut igitur veram apparentiæ corporum opacorum cauſam inveſtigemus, ratiocinium ab ipſis principiis repeti oportebit. Ac primo quidem, cum corpora opaca non fiant conſpicua, niſi aliunde radii in ea incidant, eaque illuminent; neceſſario ſequitur, in his radiis veram latere cauſam, cur hæc corpora videamus. Cum deinde nihil niſi radiorum ope videamus, hinc porro intelligitur, radios in corpora opaca incidentes efficere, ut ab his corporibus radii ad oculos noſtros transmittantur. Tum vero quia cuncta corpora opaca certo colore tincta cernuntur, utcunque illuminentur & ubicunque aſpiciantur, effectus radiorum incidentium ſeu illuminationis ita erit comparatus, ut inde radii datæ ſpeciei quaquaverſus emittantur. Excludimus autem hinc corpora ambigui coloris, quæ prout ex alio alioque loco aſpiciantur, diverſos colores præ ſe ferunt; cum hujusmodi

 corpo-

corporum ſingularium peculiaris ſit ratio, neque ex iis reliquorum corporum conditio dijudicari debeat.

§. CX. Duplici autem modo emiſſio radiorum a radiis incidentibus proficiſci poteſt. Vel enim primo radii iidem qui inciderunt, repercutiuntur, atque a corpore illuminato, quaſi inde eſſent egreſſi, diffunduntur. Vel ſecundo radii hi illuminantes particulas corporis ita excitant atque impellunt, ut ipſæ contremiſcere & in æthere ſeu medio diaphano circumfuſo pulſus producere valeant; neque præter hos duos modos tertius excogitari poteſt. Priorem autem modum, qui reflexione ad ſecundam corporum claſſem pertinente conſtat, a præſenti negotio jam prorſus removimus; propterea quod hoc caſu corpora opaca non ſe ipſa, ſed ea objecta, unde radios acceperint, viſui repræſentare deberent: tum vero quod iſto modo conſtantia colorum, quibus pleraque corpora opaca tincta cernuntur, neutiquam explicari atque ad conſenſum cum experientia revocari poſſet.

§. CXI. Cum igitur prior modus ad phænomena corporum opacorum explicanda plane ſit ineptus, alterum neceſſario amplecti oportet. Quamobrem, etſi corpora opaca, niſi aliunde illuminentur, viſum noſtrum effugiunt; tamen ea per radios reflexos non cernimus, ſed per radios, quos ipſæ horum corporum particulæ ad motum tremulum concitatæ producunt. Radii ſcilicet, qui in ſuperficiem horum corporum incidunt, inde non reflectuntur, ſed particulis corporis motum vibratorium inducunt, qui in medio pellucido circum-

circumfuſo, aeque atque agitatio corporum per ſe lucentium pulſus ac propterea radios viſivos efformare poſſit. Discrimen ergo inter corpora per ſe lucentia & opaca in hoc erit ſitum, quod corpora lucida vi quadam propria radios emittant, opaca autem idem per vim alienam, quam a radiis illuminantibus impetraverint, efficiant. Ex quo perſpicuum eſt fulgorem corporum opacorum multo debiliorem eſſe debere, quam lucidorum, id quod experientia clariſſime evincit.

§. CXII. Deinde vero hinc manifeſtum eſt, corpora opaca, quia radii a propriis eorum particulis excitantur, ſe ipſa, non vero ea objecta, a quibus illuminantur, viſui repræſentare debere. Neque etiam hic ſitus corporis illuminantis, neque ſitus oculi ullam movet difficultatem, cum radii lucis, undecunque advenerint, particulis corporis, in quas impingunt, motum vibratorium inducant, atque ab hoc motu vibratorio radii quaquaverſus propagentur. Apparentia ergo corporum opacorum æque conſtans eſſe debet, ac lucidorum; atque adeo præcipuæ difficultates, quibus altera explicatio laborabat, ſponte evaneſcunt, nullumque hic locum inveniunt. Reliqua vero etiam phænomena corporum opacorum tam dilucide hinc explicantur, ut de univerſæ theoriæ noſtræ veritate nullum amplius dubium ſupereſſe poſſit.

§. CXIII. Natura ergo radiorum, quibus corpus opacum conſpicitur, non pendet a radiis corpus illuminantibus, ſed a motu vibratorio minimarum particularum, quibus cor-

poris ſuperficies eſt obſita. Particulæ ſcilicet iſtæ minimæ ſimiles ſunt cordarum tenſarum, quæ ad certum tantum motum tremulum ſunt diſpoſitae, & quem recipiunt, etiamſi non impellantur, dummodo ſimili pulſuum motu in aere jam èxcitato, urgeantur. Quemadmodum ergo corda tenſa a ſono ei, quem ea edit, aequali vel conſono concitatur, ita particulae illae minimae in ſuperficie corporis opaci ſitae, a radiis ejusdem vel ſimilis indolis, contremiſcere, pulſusque undique diffundendos producere valebunt. Radii itaque lucis, quoniam omnis generis pulſus, ratione frequentiae, involvunt, omnes corporum opacorum particulas ad motum ciebunt; etiamſi enim non eadem pulſuum frequentia in radiis inſit, tamen dummodo fuerit duplo, triplove major vel minor, tremorem etſi debiliorem inducet.

§. CXIV. Color igitur, ſub quo corpus opacum apparet, a tenſione & vi elaſtica minimarum particularnm pendet, quæ quamdiu inalterata ſervatur, idem color in corpore percipietur. Hincque ideo diſtinctam adipiſcimur ideam colorum, quibus corpora tincta cernuntur. Scilicet cum ſinguli colores ſimplices, tanquam ſoni ſimplices, certo vibrationum numero, quæ dato tempore eduntur, determinentur; cuilibet colori certus reſpondebit numerus, qui indicat quot vibrationes uno verbi gratia minuto ſecundo eduntur. Corpus ergo erit rubrum, cujus particulæ eum habent tenſionis gradum, ut impulſæ uno minuto ſecundo totidem reddant vibrationes, quot ad hunc colorem requiruntur: ſimilisque erit ratio aliorum colorum. Quare ad cognitionem

nem colorum completam nil amplius requiritur, quam ut veros iſtos numeros vibrationum, quæ ad quemvis colorem producendum uno minuto ſecundo requiruntur, cognoſcamus

§. CXV. Merito autem ſummopere dubitamus, utrum unquam ad hanc cognitionem ſimus perventuri? Tanta enim videtur omnium pulſuum, quemcunque etiam colorem efficiant, frequentia, ut nulla experimenta tantis numeris indicandis ſufficiant; præſertim cum in hoc negotio non talia experimenta inſtituere liceat, qualia frequentiam vibrationum quemlibet ſonum edentium docuerunt. Vidimus enim pulſus in æthere ſingulis minutis ſecundis per ſpatium 647367344 pedum propagari; atque in corpore diaphano maxime refringente, quia ratio ſinus anguli incidentiæ ad ſinum anguli refracti ſemper minor eſt quam dupla, celeritas radiorum nusquam duplo minor eſt, quam aſſignata. Cum igitur in mediis refringentibus pulſus ſequentes in antecedentes agant, neceſſe eſt ut intervalla inter binos pulſus proximos non ſint adeo magna; ex quo recte concludimus, numeros pulſuum in quovis colore ad nos uno minuto ſecundo appellentium eſſe maximos.

§. CXVI. Ponamus radium, qui colorem rubrum repræſentat, uno minuto ſecundo ad oculum afferre α pulſus; & quemadmodum in muſica ſoni, quorum vibrationes eodem tempore editæ rationem tenent duplam vel quadruplam vel octuplam vel &c. pro ſimilibus habentur, ita quoque

 radii

radii ſimplices, qui uno minuto ſecundo vel 2α, vel 4α, vel 8α &c. vel etiam $\frac{1}{2}\alpha$, vel $\frac{1}{4}\alpha$, vel $\frac{1}{8}\alpha$ &c. vibrationes continent, omnes rubri cenſebuntur. Hinc plura ejusdem coloris dabuntur genera, quæ inter ſe non magis discrepabunt, quam toni muſici ejusdem nominis una pluribusve octavis a ſe invicem diſtantes. Quæ eadem ratio, cum pro omnibus reliquis coloribus ſimplicibus æque locum habeat, manifeſtum eſt, omnes colores ſimplices intra rationem duplam contineri, ita ut vibrationes vel celeriores vel tardiores ſimiles colores exhibeant eorum, qui ipſis in iſto intervallo rationis duplæ reſpondent: ſimili ſcilicet modo, quo in muſica omnes ſoni diverſi in uno intervallo diapaſon includi ſolent.

§. CXVII. Sicuti igitur in intervallo unius octavæ revera innumerabiles toni continentur, etiamſi aliquot tantum in muſica adhibeantur, & a muſicis nomina obtinuerint, ita quoque in intervallo diapaſon colorum ſimplicium revera innumerabiles colores diverſi inſunt, quorum tantum nonnullis pro copia cujusque linguæ peculiaria nomina tribuuntur, reliqui autem nominibus eorum, ad quos proxime accedunt, denotari ſolent. Ita ſi α ſit numerus pulſuum in uno minuto ſecundorum editorum, quo ſenſus coloris rubri excitatur; ſimilique modo colores flavi, virides, cœrulei & violacei per numeros β, γ, δ & ϵ exponantur, erunt hi quidem numeri minores quam α, ſimul vero majores quam $\frac{1}{2}\alpha$; cum hic numerus iterum colorem rubrum, $\frac{1}{2}\beta$ flavum, $\frac{1}{2}\gamma$ viridem, $\frac{1}{2}\delta$ cœruleum & $\frac{1}{2}\epsilon$ violaceum repræſentet. Deinde

inde rursus hi numeri $\frac{1}{4}\,\alpha$, $\frac{1}{4}\,\beta$, $\frac{1}{4}\,\gamma$, $\frac{1}{4}\,\delta$, $\frac{1}{4}\,\varepsilon$ eodem ordine eosdem colores exhibere judicantur.

§. CXVIII. Cum ex quolibet radio solis omnes isti diversi radii simplices per refractionem oriantur, perspicuum est, inæqualitatem, quæ in motu vibratorio particularum solis reperitur, rationem duplam non superare, sed ea aliquanto minorem esse; propterea, quod lentissimus motus vibratorius colorem violaceum producit, qui demum, si adhuc lentior fieret, iterum in rubrum abiret. Si ergo hos colores simplices in radiis solis existentes cum Neutono primitivos appellemus, reliqui qui ex motu vibratorio vel duplo magis vel duplo minus frequente oriuntur, erunt derivativi. Verisimile autem videtur, frequentiorem motum vibratorium, quam in particulis ignis, nusquam occurrere, omnesque ideo colores derivativos a vibrationibus vel duplo vel quadruplo vel octuplo &c. lentioribus proficisci. Hujusmodi ergo radii adhuc majorem refractionem perpeti deberent quam violacei primitivi, quod operæ pretium foret, ut per experimenta exploraretur.

§. CXIX. Si igitur corporis cujuspiam particulæ omnes in ejus superficie sitæ æqualiter fuerint tensæ & elasticæ, ita ut a radiis illuminantibus impulsæ æqualem motum vibratorium induant, tum istud corpus cernetur colore simplici tinctum; atque cum radii simplices per refractionem nullam alterationem patiantur; hujusmodi corpus, sive directe

cte five per reflexionem, five per refractionem confpiciatur, eundem colorem conftanter habere apparebit. Sin autem ejus particulæ diverfis tenfionis gradibus gaudeant, infuperque invicem æquabiliter fuerint permixtæ, tum quidem colorem uniformem ac fortaffe fimplicem mentientur, fed per refractionem diverfi hi radii a fe invicem feparabuntur, varietatemqne patefacient. Scilicet fi difcrimen inter particulas non fuerit admodum notabile, uti fi aliæ colorem flavum, aliæ cœruleum exhibeant, tum ex eorum mixtione color viridi fimilis refultabit. Verum fi particulæ omnes duplicis tantum fint generis, exiftente alterius motu vibratorio duplo celeriore, quia ab utroque idem color efficitur, corpus utique colore fimplici tinctum videbitur, refractio autem multo magis diverfitatem manifeftabit.

§. CXX. Cum radii folares colorem album repræfentent, ex fupra expofitis facile intelligitur, ad colorem album repræfentandum omnis generis tenfiones in particulis requiri, quæ fatis æquabiliter inter fe fint permixtæ. Hinc color albus maxime eft compofitus, quemadmodum Neutonus per plurima experimenta evidentiffime demonftravit. Sin autem particulæ corporis tam fint laxæ, ut nullum motum vibratorium, qualis ad colorem quempiam repræfentandum requiritur, recipere valeant, tum ab hoc corpore vifus plane non excitabitur, indeque nigrum apparebit; quæ eft nigredo perfectiffima. Minus autem nigredo erit perfecta, quo plures particulæ tenfæ laxis fuerint interfperfæ; atque ex

ex hujusmodi particularum satis tensarum & laxarum permixtione innumeri gradus obscuritatis & claritatis colorum tam simplicium quam compositorum oriuntur.

§. CXXI. Quantitas autem claritatis, sub qua quisque color conspicitur, maxime pendet ab intensitate luminis, quo corpus illustratur. Quo fortiores enim fuerint pulsus radiorum incidentium, eo magis particulæ corporis ad motum impelluntur, hincque iterum eo fortiores pulsus generant: sic corpora, quæ immediate a radiis solis illuminantur multo illustriora apparent, quam quæ a radiis corporum opacorum vel saltem minus lucidorum illuminantur: atque adeo hujusmodi obscurior apparentia præ clariore pro umbra haberi solet. Hinc etiam perspicimus in combustione corporum & liquefactione metallorum, quæ collectione radiorum ope lentis vel speculi caustici instituitur, nihil aliud præstari, nisi ut particulæ a tanta pulsuum vi vel disrumpantur vel a se invicem divellantur; ex quo cognitio combustionis & liquefactionis corporum, quamvis hi effectus etiam ab aliis causis proficiscantur, non mediocriter illustratur. Conveniunt enim mirifice omnia reliqua phænomena, quæ hæ corporum alterationes suppeditant.

§. CXXII. Sæpenumero autem quatuor illarum proprietatum, ad quas omnia visus phænomena revocavimus, & quæ sunt lux propria, reflexio, refractio, & opacitas, duæ pluresve simul in eodem corpore inesse possunt. Videtur qui-

quidem lux propria reliquas proprietates ita excludere, ut cum nulla earum ſimul ſubſiſtere poſſit: ſed præterquam, quod ignis pelluciditate quapiam ſit præditus, experimenta non deſunt, quibus corpus per ſe lucens a luce fortiori illuminatum tanquam corpus opacum conſpici evincitur. Sic die lignum putridum, nitedula & mercurius in vacuo non ſplendent, cum tamen noctu propria luce cernantur; ſcilicet in his corporibus motus tremulus ex propria agitatione ortus minor eſt eo, quem radii alieni eorum particulis inducunt. Atque dum lapis Bononienſis ſoli eſt expoſitus, ejus particulæ inde acquirunt motum vibratorium ſatis diu perdurantem, unde fit ut conclavi obſcuro incluſus, adhuc propria luce ſenſum viſus afficere valeat.

§. CXXIII. Deinde quoque vix ulla datur ſuperficies reflectens, quæ non ipſa per ſe ſit conſpicua; ita ut ejus particulæ non ſolum radios incidentes reflectant, ſed etiam ab illis motum vibratorium impetrent. Sic omnium colorum habentur corpora reflectentia, quæ ergo tam reflexionis quam opacitatis ſunt participia. Pleraque enim corpora per polituram ita lævigari poſſunt, ut radios incidentes reflectant; neque vero propterea colores ſuos naturales exuunt; ſic aurum politum colorem ſuum flavum, & cuprum colorem ſuum rubrum conſervat. Duplex autem iſte videndi modus facillime dignoſcitur, dum radii reflexi non id corpus, unde reflectuntur, ſed id, ex quo primum

erant

erant egressi, repræsentant; illi vero radii, qui a motu vibratorio particularum istius corporis oriuntur, hoc ipsum corpus spectandum offeruut. Hoc modo sæpius in pariete a sole illuminato nitorem quemdam præter ejus naturalem colorem conspicamur, quem a radiis solaribus reflexis oriri, ejus situs manifesto indicat.

§. CXXIV. Corpora porro pellucida non solum plerumque radios reflectunt, sed etiam proprio colore tincta cernuntur; sic in superficie aquæ stagnantis imagines objectorum externorum per reflexionem apparent, pelluciditate, qua corpora trans aquam spectamus, non sublata. Imprimis autem plurima corpora pellucida quibusvis coloribus tincta extant, qui colores non solum in externa superficie conspiciuntur, sed etiam per internam substantiam transparent. In his ergo corporibus non solum externæ particulæ aptæ sunt ad radios reflectendos, sed etiam internæ particulæ ita sunt comparatæ, ut radios transmittere possint. Præterea vero hæ ipsæ particulæ tam externæ quam internæ proprium motum vibratorium recipere possunt, quo certum colorem exhibeant: atque cum propagatio pulsuum per easdem particulas fiat, radii refracti eandem naturam recipient; eo quod transmissio reliquorum radiorum ab his particulis, ad certum tantum colorem instructis, arcetur.

§. CXXV. Per vitrum ergo, exempli gratia, rubrum quæque objecta videmus, sed omnia colore rubicundo tincta apparent, quia reliqui radii quasi extinguuntur. Sic per

hujusmodi vitrum ea corpora eo illuſtriora ſpectantur, quæ ipſa ſunt rubra, quippe quorum radii fere ſine diminutione transmittuntur, alia vero corpora minus clare percipiuntur. Ea quidem, ſi nullos prorſus radios rubros emitterent, omnino non cerni deberent: ſed nullum fere extat corpus, quod non omnis generis radios ſimplices emittat, ejusque color non tam a conſenſu omnium radiorum, quam a majori copia certorum generum determinatur. Quin etiam omnia corpora pellucida certo quodam colore prædita deprehenduntur, etiamſi ſæpe iſtæ particulæ coloratæ tam ſint raræ, ut niſi ex longo intervallo ſpectentur, quo caſu inter ſe propiores apparent, ſenſum viſus afficere nequeant. Sic aqua marina, ſi fuerit ſatis profunda, viridi colore tincta videtur, atque ipſe aer, etſi omnium corporum eſt transparentiſſimus, tandem colorem cœruleum viſui offert. Hincque fit, ut objecta valde remota per aerem viſa, uti montes & ſilvæ colore ad cœruleum accedente cernantur; eademque eſt ratio, cur cœli ſereni color cœruleus appareat. Radii enim, qui ex motu tremulo particularum aerearum oriuntur, etiamſi ſint maxime rari & imbecilles, tamen magnitudine intervalli congregantur & quaſi inſpiſſantur, ut colorem ſatis intenſum efficiant. Simili ſcilicet modo, quo oculus in medio oceani conſtitutus unde quaque colorem viridem eſſet percepturus, ita oculus in aere ſitus colorem cœruleum ſpectare debet.

DE

DE RELAXATIONE MOTUS PLANETARUM.

§. I.

A veræ physicæ principiis nimium abhorret eorum sententia, qui planetas in spatio ab omni materia vacuo moveri statuunt. Non attingam hic controversiam famosissimam de vacuo, utrum in mundo locum inveniat, nec ne? quicquid enim de hac quaestione sentiatur, spatium, in quo planetæ & cometæ circa solem volvuntur, omnino vacuum esse nequit. Cum enim ad hæc corpora in orbibus suis continenda vi opus sit centripeta, hujusmodi vis in vocuo absoluto concipi non potest, nisi cum plerisque philosophis Anglis, qui se magnum Neutonum sequi profitentur, attractionem mutuam inter ipsas omnium corporum proprietates referre velimus. Interim tamen etiamsi hanc opinionem amplecteremur, tamen universi spatium ab omni materia vacuum servare non possemus. Nullum enim est dubium, quin radii lucis cum materia quadam subtili sint conjuncti; quoniam in vacuo quidem radios lucis statuere absurdissimum foret. Cum igitur in cœlo nullum quasi punctum assignari queat, ad quod radii lucis tam solis & stellarum non continuò penetrent, totum cœli spatium necessario illa materia subtili, qua radii constant, perpetuò erit Tab. VI.

repletum. Sive enim radii tanquam effluvia ex ſole ejaculentur, ſive inſtar ſoni per medium quoddam elaſticum propagentur, utroque caſu totum ſpatium, in quo planetæ moventur, materia quadam plenum habebimus. Quæ cum negari nullo modo queat, ſi eum ætherem appellemus, hujus certe ætheris exiſtentia ſolidiſſimis argumentis evicta eſt cenſenda.

§. II. Cum igitur æther univerſum cœli ſpatium impleat, quæſtio nascitur difficillima, utrum planetæ ab eo reſiſtentiam patiantur nec ne? niſi enim æther cum planetis communem habeat motum, ob inertiam ipſis neceſſario reſiſtere debet; ſin autem æther eadem celeritate qua planetæ circa ſolem revolvatur, cometæ, qui curſum ſecundum directiones oppoſitas habent directum, eo majorem reſiſtentiam ſentire deberent. De cometis quidem, cum eorum apparentia non ſit perennis, minus certum judicium petitur; neque enim effectus reſiſtentiae percipitur, neque temporis ſpatium ad hoc ſufficit, niſi reſiſtentia eſſet valde magna, quod tamen non probabile videtur. Verumtamen ex pluribus ejusdem cometae reverſionibus, tempora periodica conferendo aliquid concludi poſſet; ſi enim perpetuo eodem tempore elapſo ad perjhelium reverteretur, nullum inde reſiſtentiae indicium haberetur; ſin autem ejus tempus periodicum ſenſim decreſcere deprehenderetur, tum in hoc ipſo effectus reſiſtentiae eſſet collocandus. Sic cometa, qui A. 1682. apparuit, idem eſſe cenſetur, qui A. 1607. & A. 1531. eſt obſerva-

ſervatus; & ſecundum calculos Halleii tempus a prima apparentia ad ſecundam anno circiter excedit tempus a ſecunda ad ultimam elapſum: hincque ideo indubitatum haberemus teſtimonium reſiſtentiae ætheris in motu cometarum. Infra enim demonſtrabitur, a reſiſtentia tempora periodica continuo decreſcere debere. Tum vero etiam ob conſtantem caudarum cometicarum directionem aether in quiete verſari videtur: ſi enim materia aetheris ſimul cum planetis circa ſolem pari motu gyraretur, caudas cometarum ſecum abripere ſicque efficere deberet, ut caudæ perpetuo in eam plagam, in quam motus ætheris dirigitur, deflecterent; quod cum non obſervetur, non immerito ſuſpicamur ætherem in cœlo quieſcere, vel ſaltem non ejusmodi habere motum conſtantem & velocem, quo caudarum directio immutari poſſet.

§. III. Quoniam itaque æther non ſolum revera adeſt, ſed etiam nullo motu notabili cieri videtur, fieri omnino nequit, ut planetæ ab illo nullam reſiſtentiam ſuſtineant; a qua partim tempora periodica, partim orbitarum excentricitates minui debeant, uti in ſequentibus demonſtrabitur. Interim tamen nulla fere hujusmodi mutatio ab Aſtronomis, etiamſi obſervationes intervallo 4000 annorum factæ inter ſe conferantur, deprehenditur. Hinc autem plus non ſequitur, quam mutationes has tam eſſe exiguas, ut ad eas percipiendas vel ne hoc quidem tempus ſufficiat, vel obſervationum præſertim antiquiſſimarum accuratio non ſuppetat. Quanquam enim tam remotæ obſervationes præſto ſunt, tamen difficile eſt ex

iis

iis ejusdem planetæ tempora periodica, quæ diversis seculis tenuerit, colligere, atque inter se comparare. Tutissime enim cujusque planetæ tempus periodicum inveniri censetur, si ejus observationes novissimæ cum antiquissimis conferantur; hoc autem modo neque id tempus periodicum, quod planetæ nunc convenit, reperitur, neque id, quod ipsi in antiquitate obtigerat; sed medium quoddam tempus prodit, quod sine dubio præsenti tanto est majus, quantum ab antiquo deficit. Neque etiam observationes medii ævi tuto in subsidium vocare licet, cum eæ plerumque nimis sint crassæ, quam ut quicquam certi inde concludi posset. Motus tamen solis vel potius terræ hunc resistentiæ effectum non obscure declarare videtur: quo longius enim in antiquitatem regrediamur, anni spatium longius creditum fuisse, quam nunc quidem comperimus. Namque ante nostra tempora annus tropicus nunquam minor est habitus quam 365 d. 5 h. 49′, cum tamen is nunc ab astronomis aliquot scrupulis secundis minor statuatur. Quod autem ad excentricitatis decrementum attinet, etsi terræ excentricitas olim major est putata quam nunc, tamen observationes veteres minus sunt exactæ, quam ut vera excentricitas illorum temporum inde concludi possit. Quoniam tamen omnes astronomi antiqui orbitæ terræ unanimiter majorem excentricitatem tribuerunt, quam hodierni, hinc non infirmum argumentum pro resistentia ætheris evincenda, suppeditari videtur.

§. IV. Quidquid autem ſit, tantum certe hinc tuto colligitur, reſiſtentiam ætheris eſſe minimam, quod quidem ſumma ejus raritas aperte declarat. Nullum enim eſt dubium, quin æther ſit materia aere longe rarior, etiamſi ejus elaſticitas aeris elaterem maxime ſuperet. Reſiſtentia autem pendet a denſitate medii, quæ ſi fuerit minima, ipſam reſiſtentiam inſenſibilem eſſe oportet. Ex celeritate quidem radiorum ſolis, ſi cum celeritate ſoni conferatur, liquido colligitur, ſi denſitas ætheris ad denſitatem aeris naturalis ponatur ut 1 ad m, elaſticitas autem ætheris ad elaſticitatem aeris ut n ad 1, fore, ſicut in diſſertatione de luce oſtendi, $mn = 387467100000$, pro quo numero utamur iſto rotundo $mn = 400000000000$. Si igitur elaſticitas ætheris millies major aſſumatur, quam aeris, ita ut ſit $n = 1000$, fiet $m = 400000000$, totiesque denſitas ætheris minor foret denſitate aeris; in tali autem medio rariſſimo corpus admodum denſum, cujusmodi ſunt planetæ, diutiſſime moveri poteſt, antequam portionem ſenſibilem celeritatis ſuæ amittat. Si numerus n adhuc foret minor, alter numerus m tanto major prodiret: at quia durities corporum a vi ætheris elaſtica proficiſcitur, ſiquidem eam a cauſa mechanica derivare velimus, numerus n millenario vix minor ſtatui poterit; unde alteri numero m majorem valorem quam 400000000 tribuere non licebit. Deductus quidem eſt valor iſte mn ex parallaxi ſolis horizontali $13''$, & tempore $8'$, quo radii a ſole ad terram pertingere putantur; quorum utrumque,

cum nondum certissime sit evictum, fieri omnino potest, ut valor producti mn adhuc multo sit major; hincque ergo resistentia aetheris multo adhuc minor admitti posset.

§. V. Antequam autem hanc resistentiam ad planetarum motus applicemus, videamus quantum detrimentum corpus, quod in aethere libere in directum promoveatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, ab ejus resistentia perpeti debeat. Sit corpus hoc sphaericum, ejusque radius ponatur $= a$: ejus autem densitas se habeat ad densitatem aeris naturalis ut k ad 1, ita ut istius corporis densitas ad densitatem aetheris, in quo movetur, futura sit ut km ad 1. Habuerit hoc corpus initio celeritatem altitudini b debitam, nunc autem percurso spatio $= x$, sit ejus celeritas debita altitudini v. Hoc ergo statu si resistentia aetheris similis sit resistentiae aeris, motus corporis retardabitur a vi, quae se habet ad ipsius massam ut $\frac{3v}{8kma}$ ad 1, unde obtinebimus hanc aequationem:

$$dv = -\frac{3v\,dx}{8kma}, \text{ seu } \frac{-dv}{v} = \frac{3\,dx}{8kma},$$

cujus integrale est $l\,\frac{b}{v} = \frac{3x}{8kma}$; ex qua aequatione cognoscitur, quomodo spatio quocunque emenso celeritas corporis se habitura sit ad celeritatem initialem. Si scilicet quaeramus, quantum spatium huic corpori percurrendum sit, donec celeritatis suae partem $\frac{1}{1000}$ amittat, poni debet $\sqrt{v} =$

999

$\frac{999}{1000} V b$, seu $\frac{V b}{V v} = 1 + \frac{1}{999}$, & $\frac{b}{v} = 1 + \frac{2}{999}$, quam proxime. Hinc erit $l \frac{b}{v} = \frac{2}{999}$ seu $\frac{2}{1000}$ proxime, ideoque $\frac{3x}{8kma} = \frac{2}{1000}$ & $x = \frac{16\, kma}{3000}$; ſpatium ergo percurret, quod ſe habebit ad ejus ſemidiametrum a ut $16\, km$ ad 3000. Cum igitur ſit $m = 400000000$, ſi corpus ſit ferreum, erit $k = 7000$, eaque proportio prodibit ut 14900000000 ad 1; ad quod certe ſpatium percurrendum longiſſimum tempus requiretur.

§. VI. Collocemus jam terram in locum hujus globi ita ut a denotet ſemidiametrum terræ. Quodſi jam tota terra ex aqua conſtaret, foret $k = 850$, ſin autem tota ex auro, quod eſt corpus ponderoſiſſimum, eſſet conflata, foret $k = 16000$; unde cum terra univerſa gravior aqua, levior tamen auro ſit putanda, litera k medium quemdam valorum inter 850 & 16000 ſortietur; & cum in imis viſceribus multo gravior videatur, quam circa ſuperficiem, fortaſſe non multum a veritate aberrabimus, ſi literæ k valorem 8000 tribuamus; ita ut ejus reſiſtentia foret, ſi celeritas ejus altitudini v debita ponatur, $= \frac{3v}{8.\ 8000.\ 400000000.\ a}$. Hoc autem modo reſiſtentia foret comparata, ſi terra nullis poris, per quos æther libere tranſire queat, eſſet pervia: cum autem æther per corpora etiam denſiſſima ſatis libere permeet, terra in motu ſuo in exiguam tantum partem ætheris impinget,

pinget, dum reliqua pars tranſitum inveniens nullam reſiſtentiam parit. Hinc ergo reſiſtentia quoque multo minor erit ſtatuenda, quam aſſumſimus, & cum fortaſſe vix decima pars motui reſiſtat, reſiſtentia, quam ante aſſumſeramus $= \frac{3v}{8mka}$, vix decimæ ejus parti æquabitur, eritque fere $= \frac{v}{27kma}$. Cum autem hic nihil certi definire liceat, ne noſtras ſpeculationes ad caſum a natura nimis abhorrentem reſtringamus, pro numero $27km$ adhibeamus literam μ, cujus loco deinceps quivis valor ſubſtitui queat. Foret autem ſi præcedentes conjecturæ veritati eſſent conſentaneæ circiter $\mu = 100000000000000$; fieri autem poteſt, ut iſte numerus multo major minorve exiſtat, præcipue pro variis planetis ſeu cometis.

§. VII. Quemcunque igitur hæc litera μ valorem habeat, in hac diſſertatione inveſtigare conſtitui, quantum motus tam planetarum quam cometarum ab iſta reſiſtentia perturbari debeat. Manifeſtum autem eſt, quando celeritas planetæ ob hanc reſiſtentiam diminuitur, eum a vi centripeta propius ad ſolem admoveri, hincque viciſſim ejus motum ccelerari debere. Quocirca ab hac reſiſtentia motus planetarum accelerabitur potius quam diminuetur, & dum eorum diſtantiæ a ſole ſenſim decreſcent, tempora periodica contrahentur, quæ mutatio quanta eſſe debeat hic perſcrutabor. Sequens ſcilicet problema reſolvere conſtitui, quo quæritur

motus

motus corporis ad quoddam centrum fixum in ratione reciproca duplicata diſtantiarum attracti, dum perpetuo reſiſtentiam patitur quadratis celeritatum proportionalem. Tractavi equidem jam hoc ipſum problema in mechanica, ejusque ſolutionem ad æquationes perduxi. Verum cum reſolutio harum æquationum nimis difficilis videretur, neque etiam inſtitutum operis perfectam evolutionem requireret, ex iis, quæ ibi ſunt tradita, parum ad plenam hujus motus cognitionem colligere licet. Inde tamen æquationes principales, quas ibi inveneram, deſumam, easque ad præſens inſtitutum accommodabo, ne iis ex primis principiis eliciendis nimium ſit immorandum.

§. VIII. Sit igitur S centrum ſolis, ad quos omnes tam planetæ quam cometæ pellantur viribus quadratis diſtantiarum reciproce proportionalibus. Sit præterea f ea a ſole diſtantia, in qua corpus ad ſolem tanta vi urgetur, quanta, ſi in ſuperficie terræ verſaretur, deorſum niteretur, ſeu ſit f ea diſtantia, in qua vis centripeta æqualis ſit vi gravitatis, quam unitate deſignemus. Quam diſtantiam, ut inveniamus, ſit T tempus periodicum terræ & A ejus axis transverſus, erit $T = \frac{\pi A \sqrt{A}}{f}$, ubi ſi $\sqrt{A}$ in partibus milleſimis pedis rhenani exprimatur, atque expreſſio $\frac{\pi A \sqrt{A}}{f}$ per 250 dividatur, tempus in minutis ſecundis expreſſum prodibit. Si ergo tempus periodicum T in minutis ſecun- *Fig. 1.*

dis exhibeatur erit $\frac{f}{A} = \frac{\pi \sqrt{A}}{250\,T}$. Cum autem ſemidiameter terræ ſit $a = 19615791$ ped. Par. poſita ſolis parallaxi horizontali 13″ fiet diſtantia media terræ a ſole $= 15866\,a$, ideoque axis tranverſus orbitæ $A = 622468600000$ ped. pariſ. ſeu in pedibus Rhenanis $A = 644211428198$. Annus autem ſidereus eſt $365^d, 6^h, 9', 36''$: ita ut in minutis ſecundis ſit $T = 31558176$. Ex his itaque valoribus calculo ſubducto reperitur $\frac{f}{A} = 0,01010677$, hincque ob $A = 31732\,a$ erit $f = 320,708\,a$, & $ff = 102854\,a^2$. Cognita ergo hac diſtantia f pro omnibus planetis & cometis eadem, in quavis diſtantia a ſole y vis attractiva ſolis erit $= \frac{ff}{yy}$, ſiquidem vis gravitatis unitate exprimatur. Ponamus ergo primum planetam in perihelio ſuo A eſſe verſatum, ita ut hoc loco ejus directio motus fuerit normalis ad rectam SA. Sit iſta diſtantia perihelii a ſole $AS = h$; celeritas vero, quam in A habuerit debita ſit altitudini b. Deinde pervenerit planeta in locum P, & ducta recta SP, item perpendiculo ex S in tangentem ST, vocentur: $SP = y$, $ST = p$, & arcus $AP = s$, celeritas autem planetæ hoc loco debita ſit altitudini v. Deſignet nunc α ſemidiametrum corporis planetæ, ac ponatur brevitatis gratia $\mu\alpha = c$. His ita præmiſſis in Mech. Tom. I. pag. 433. perveni ad has æquationes

$v =$

$v = \frac{bhh}{pp} e^{-s:c}$ & $\frac{ff}{yy} = \frac{2bhbdp}{p^3 dy} e^{-s:c}$ ubi e denotat numerum cujus logarithmus hyperbolicus $= 1$.

§. IX. Ponamus brevitatis causa $2bhh = ffg$, & posterior æquatio transibit in hanc formam:

$$\frac{e^{s:c}\, dy}{yy} = \frac{g\,dp}{p^3},$$

quæ si resistentia evanesceret, quod eveniret si μ ideoque c esset quantitas infinita, abiret in $\frac{dy}{yy} = \frac{g\,dp}{p^3}$, unde sectio conica, in qua planeta esset progressurus, si nulla adesset resistentia, facile eruitur. Hunc ergo casum, quo resistentia est nulla, prius expediamus, quam resistentiæ rationem habeamus. Æquatio autem $\frac{dy}{yy} = \frac{g\,dp}{p^3}$ integrata dat $\frac{1}{h} - \frac{1}{y} = \frac{g}{2hh} - \frac{g}{2pp}$ quoniam in A uti fit $y = h$, simul esse debet $p = h$. Hinc erit $\frac{g}{2pp} = \frac{gy - 2hy + 2hh}{2hhy}$ & $pp = \frac{ghhy}{2hh + (g - 2h)y}$. Vocemus nunc angulum ASP $= t$, eritque $dt = \frac{p\,dy}{y\sqrt{(yy - pp)}}$, quæ si, postquam loco p valor ante inventus fuerit substitutus, recte tractetur, deducetur ad hanc integralem: $y = \frac{gh}{h + (g-h)\cos t}$, ex qua oritur

$p =$

$$p = \frac{gh}{\sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos t + (g-h)^2)}}.$$

Quemadmodum illa æquatio, si ponatur $t = 0$, seu $\cos t = 1$ præbet distantiam perihelii a sole $AS = h$, ita ponendo $t = 180°$ seu $\cos t = -1$, invenietur distantia aphelii a sole $= \frac{gh}{2h-g}$, unde axis transversus erit $= \frac{2hh}{2h-g}$, & focorum distantia $= \frac{2h(g-h)}{2h-g}$. Ex quibus excentricitas orbitæ, seu focorum distantia ad axem transversum applicata erit $= \frac{g-h}{h}$; sic si sit $g = h$, erit ubique $y = h$, & corpus sine excentricitate in circulo moveretur, sin autem sit $\frac{g-h}{h} = 1$ seu $g = 2h$, erit $y = \frac{2h}{1 + \cos t}$, corpusque movebitur in parabola; quorum duorum casuum prior ad motum planetarum, posterior vero ad motum cometarum propius accedit.

§. X. Quoniam vero pro resistentia arcus curvae s in computum ingreditur, quo difficultates hinc nascendas facilius removeamus, in hypothesi vacui quantitatem arcus $AP = s$ definiri conveniet. Cum autem sit $ds = \sqrt{(dy^2 + y^2 dt^2)}$, ob $dy = \frac{gh(g-h)\, dt \sin t}{(h + (g-h)\cos t)^2}$ reperietur:

$$ds = \frac{gh\, dt \sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos t + (g-h)^2)}}{(h + (g-h)\cos t)^2}$$

quae expressio, cum generaliter ad formam integralem perduci

duci nequeat, duos casus, quorum alter ad circulum proxime accedat, alter ad parabolam, perpendamus. Sit ergo primo $g-h$ quantitas minima, ac ponatur $g-h=\beta$, fiet proxime:

$$ds=\frac{gh\,dt}{(h+\beta\cos t)^2}\left(h+\beta\cos t+\frac{\beta\beta}{2h}\sin t^2\right) \text{ seu}$$

$$ds=g\,dt\left(1-\frac{\beta}{h}\cos t+\frac{3\beta\beta}{4hh}+\frac{\beta\beta}{4hh}\cos 2t\right)$$

cujus integrale est:

$$s=gt-\frac{\beta g}{h}\sin t+\frac{3\beta\beta gt}{4hh}+\frac{\beta\beta g}{8hh}\sin 2t.$$

§. XI. Pro parabola autem ubi est $g=2h$, erit $ds=$

$$\frac{2h\,dt\sqrt{2(1+\cos t)}}{(1+\cos t)^2}=\frac{2h\,dt\sqrt{2}}{(1+\cos t)^{\frac{3}{2}}}.$$

At est $1+\cos t=2(\cos\tfrac{1}{2}t)^2$; ideoque $ds=\dfrac{h\,dt}{(\cos\frac{1}{2}t)^3}$;

hinc fit $s=\dfrac{h\sin\frac{1}{2}t}{(\cos\frac{1}{2}t)^2}+\dfrac{h}{2}\displaystyle\int\frac{dt}{\cos\frac{1}{2}t}$, porroque integrando:

$$s=h\left(\frac{\operatorname{tag.}\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}+l\operatorname{tag.}(45^\circ+\tfrac{1}{4}t)\right)$$

At si orbita tantum proxime ad parabolam accedat, ponatur $g=2h-\gamma h$; fietque

$$ds=\frac{g\,dt\sqrt{(2(1-\gamma)(1+\cos t)+\gamma\gamma)}}{(1+\cos t-\gamma\cos t)^2}$$

Cum igitur sit $1+\cos t=2\cos\frac{1}{2}t^2$, erit

$$ds=\frac{g\,dt\sqrt{(4(1-\gamma)\cos\frac{1}{2}t^2+\gamma\gamma)}}{(2\cos\frac{1}{2}t^2-\gamma\cos t)^2}.$$

Hæc

Hæc æquatio perducitur porro ad hanc formam:

$$ds = \frac{g\,dt\,V((2-\gamma)^2 \operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma\gamma \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2)}{(2(1-\gamma)\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma)^2} \text{ feu}$$

$$ds = \frac{g\,dt\,V((2-\gamma)^2 \operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma\gamma \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2)}{((2-\gamma)\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2)^2}$$

Si jam γ tam fit parvum, ut $\gamma\gamma$ præ reliquis terminis negligi queat, erit:

$$ds = \frac{g(2-\gamma)\,dt \operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t}{((2-\gamma)\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2)^2} = \frac{gg\,h\,dt \operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t}{(g\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma h \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2)^2}$$

quæ reducitur ad hanc formam:

$$s = \frac{gh \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t}{g\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma h \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{g\,h\,dt \operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t}{g\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma h \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2}$$

cujus integrale debito modo fumtum fit:

$$s = \frac{gh \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t}{g\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t^2 + \gamma h \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t^2} + \frac{hVg}{2V(g-\gamma h)}\, l\, \frac{Vg + \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t.V(g-\gamma h)}{Vg - \operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t.V(g-\gamma h)}$$

Hinc fi ponatur $t = 180°$, ut fit $\operatorname{fin}\tfrac{1}{2}t = 1$ & $\operatorname{cof}\tfrac{1}{2}t = o$, prodibit femiffis perimetri hujus ellipfis maxime oblongæ $=$

$$\frac{g}{\gamma} + \frac{hVg}{2V(g-\gamma h)}\, l\, \frac{Vg + V(g-\gamma h)}{Vg - V(g-\gamma h)}$$

axis tranverfus autem erit $= \frac{2h}{\gamma}$, hincque tempus periodicum $= \frac{2\pi h V 2h}{\gamma f V\gamma}$.

§. XII. Introducamus nunc rationem refiftentiæ; & cum in vacuo inveniffemus $y = \frac{gh}{h + (g-h)\operatorname{cof}t}$ five $\frac{1}{y} = \frac{1}{g}$

$+(g$

$+\frac{(g-h)\cos t}{gh}$, assumamus pro æthere hanc æquationem $\frac{1}{y}=\frac{1}{g}+\frac{(g-h)\cos t}{gh}+P$, ubi quidem ob resistentiam minimam P erit quantitas quoque minima, & quia P est functio ipsius t, ponatur $dP=Q\,dt$, & $dQ=R\,dt$. Hinc ergo erit $\frac{dy}{yy}=\frac{(g-h)\,dt\sin t}{gh}-Q\,dt$. At ex æquatione $dt=\frac{p\,dy}{y\sqrt{(yy-pp)}}$, unde obtinetur $\frac{1}{pp}=\frac{1}{yy}+\frac{dy^2}{y^4\,dt^2}$, & loco y valore suo substituto $\frac{1}{pp}=\frac{1}{gg}+\frac{2(g-h)\cos t}{ggh}+\frac{(g-h)^2}{gghh}+\frac{2P}{g}+\frac{2(g-h)P\cos t}{gh}+PP-\frac{2(g-h)Q\sin t}{gh}+QQ$, ubi quidem quadrata terminorum minimorum PP & QQ tuto negliguntur. Hinc autem per differentiationem prodit:

$$\frac{dp}{p^3}=\frac{(g-h)\,dt\sin t}{ggh}-\frac{Q\,dt}{g}+\frac{(g-h)P\,dt\sin t}{gh}+\frac{(g-h)R\,dt\sin t}{gh}$$

Resumamus nunc æquationem principalem $\frac{s:c\;dy}{yy}=\frac{g\,dp}{p^3}$ & quia c est quantitas maxima, erit $\frac{s}{c}$ fractio valde parva, nisi quidem corpus jam plurimas revolutiones absolverit; Quare si calculum non ad plures revolutiones simul exten-

 dere

dere velimus pro $e^{s:c}$ tuto scribere poterimus $1 + \frac{s}{c}$; hincque hæc nascetur æquatio:

$$\frac{dy}{yy} + \frac{s\,dy}{cyy} = \frac{g\,dp}{p^3}$$

ubi si pro $\frac{dy}{yy}$ & $\frac{dp}{p^3}$ valores ante exhibitos substituamus, terminis utrinque æqualibus deletis, remanebit:

$$\frac{(g-h)\,s\,\sin t}{cgh} = \frac{(g-h)\,dt\,\sin t}{h}(P+R)$$

seu ob $R = \frac{ddP}{dt^2}$, erit $\frac{s\,dt^2}{cg} = ddP + P\,dt^2$ quæ si methodo alibi exposita integretur dabit:

$$P = \frac{\sin t}{cg}\int s\,dt \cos t - \frac{\cos t}{cg}\int s\,dt \sin t, \text{ erit enim}$$

$$Q = \frac{\cos t}{cg}\int s\,dt \cos t + \frac{\sin t}{cg}\int s\,dt \sin t \ \&$$

$$R = -\frac{\sin t}{cg}\int s\,dt \cos t + \frac{\cos t}{cg}\int s\,dt \sin t + \frac{s}{cg}$$

ex quibus valoribus veritas æquationis $\frac{s}{cg} = P + R$ comprobatur.

§. XIII. Ut autem constantes, quas hæc integralia secum gerunt, determinemus, ad motus initium est spectandum, ubi fit $t = o$, $y = h$, & $dy = o$. Ideoque hoc casu tam P, quam Q evanescere debet, quod eveniet, si integralia $\int s\,dt \cos t$ & $\int s\,dt \sin t$ ita sumantur, ut evanescant posito

posito $t = o$. Loca autem sequentium apheliorum & periheliorum reperientur ponendo $dy = o$, unde fit $Q = \frac{(g-h)\sin t}{gh}$, qui valor si substituatur, æquatio hæc

$$(g-h)\sin t = \cos t \int s\,dt \cos t + \sin t \int s\,dt \sin t$$

definiet omnia aphelia & perihelia, in quæ planeta seu cometa successive pertinget. Cognitis autem locis apheliorum & periheliorum seu valoribus angulorum t; hinc quoque distantiæ maximæ & minimæ determinabuntur ope æquationis:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{g} + \frac{(g-h)\cos t}{gh} + P.$$

Superest ergo ut integralia $\int s\,dt \cos t$ & $\int s\,dt \sin t$ investigemus; cum autem valor arcus s per formulam finitam exhiberi nequeat, istæ expressiones ita transformentur:

$$\int s\,dt \cos t = s \sin t - \int ds \sin t,$$

$$\int s\,dt \sin t = -s \cos t + \int ds \cos t,$$

qui valores substituti dabunt:

$$P = \frac{s}{cg} - \frac{\sin t}{cg}\int ds \sin t - \frac{\cos t}{cg}\int ds \cos t$$

$$Q = \quad - \frac{\cos t}{cg}\int ds \sin t + \frac{\sin t}{cg}\int ds \cos t$$

ubi hæc integralia iterum ita accipi debent, ut evanescant posito angulo ASP $= t = o$. Cum igitur sit

$$ds = \frac{gh\,dt\,\sqrt{(hh + 2h(g-h)\cos t + (g-h)^2)}}{(h + (g-h)\cos t)^2}.$$

videndum est, utrum hoc differentiale, cum per $\sin t$ tum etiam per $\cos t$ multiplicatum, integrabile existat nec ne?

§. XIV. Formula quidem altera $\int ds \sin t$, ad hanc formam perducitur ut sit posito $g-h=\zeta h$

$$\int ds \sin t = \frac{g\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta(1+\zeta\cos t)} + g\int\frac{dt \sin t}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}$$

Quin etiam posterioris membrum integrale assignari potest per quadraturam circuli, ita ut debita addita constante sit

$$\int ds \sin t = \frac{g\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta(1+\zeta\cos t)} - \frac{2g}{\zeta\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}\ \text{A tag.}\ \frac{\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}} - \frac{g}{\zeta} + \frac{2g}{\zeta\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}\ \text{A tag.}\ \frac{1+\zeta}{\sqrt{(1-\zeta\zeta)}}$$

Altera autem formula non æque tractari potest; fit enim

$$\int ds \cos t = \int\frac{g\,dt \cos t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta\cos t)^2}$$

quæ ad sequentia integralia simpliciora reducitur,

$$\int ds \cos t = \frac{g\cos t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{\zeta\sin t(1+\zeta\cos t)} + g\int\frac{dt\cos t}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}} + \frac{g}{\zeta}\int\frac{dt\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta\cos t)\sin t^2},$$

vel hoc modo:

$$\int ds \cos t = \frac{g\sin t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1-\zeta\zeta)(1+\zeta\cos t)} - \frac{g}{1-\zeta\zeta}\int\frac{\zeta\,dt(\zeta^2+2\zeta\cos t+\cos t^2)}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}$$

Cujus integrale cum etiamnum exhiberi nequeat, si fortasse ab ipso arcu s pendeat, conveniet notasse:

$$s = -\frac{\zeta g\sin t\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}{(1-\zeta\zeta)(1+\zeta\cos t)} + \frac{g}{1-\zeta\zeta}\int\frac{dt(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta\cos t^2)}{(1+\zeta\cos t)\sqrt{(1+2\zeta\cos t+\zeta\zeta)}}.$$

Potest

Poteſt etiam formula $ds \cos t$ ad quantitates conſuetas reduci ponendo $\cos t = x$, ut ſit $dt = \frac{-dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Hinc autem fiet $\int ds \cos t = -g \int \frac{x\,dx \sqrt{(1+2\zeta x+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta x)^2 \sqrt{(1-xx)}}$, eſtque

$$s = -g \int \frac{dx \sqrt{(1+2\zeta x+\zeta\zeta)}}{(1+\zeta x)^2 \sqrt{(1-xx)}}.$$

Quomodocunque autem hæ formulæ tractentur, earum integralia in quantitatibus finitis exhiberi nequeunt.

§. XV. Quæ difficultas cum impediat, quominus hoc problema generaliter pertractare queamus, eos ſaltem caſus evolvamus, qui in mundo locum habent, & pro quibus ante valorem arcus s proxime eruimus. Sit igitur excentricitas $\frac{g-h}{h}$ valde parva, maneatque ut ante $g-h = \zeta h$, ita ut litera ſupra adhibita $\mathfrak{C}$ ſit $= \zeta h$; eritque pro motu planetarum in orbitis parum excentricis:

$$ds = g\,dt\,(1-\zeta \cos t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta + \tfrac{1}{4}\zeta\zeta \cos 2t) \;\&$$

$$s = gt - \zeta g \sin t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta g t + \tfrac{1}{8}\zeta\zeta g \sin 2t.$$

Hinc erit pro formulis ſuperioribus:

$$\int ds \sin t = g \int dt\,(\sin t - \tfrac{1}{2}\zeta \sin 2t + \tfrac{5}{8}\zeta\zeta \sin t + \tfrac{1}{8}\zeta\zeta \sin 3t)$$

& integrando

$$\int ds \sin t = g\,(1-\cos t + \tfrac{1}{4}\zeta \cos 2t - \tfrac{5}{8}\zeta\zeta \cos t - \tfrac{1}{24}\zeta\zeta \cos 3t - \tfrac{1}{4}\zeta + \tfrac{2}{3}\zeta\zeta.$$

Simili modo erit

$$ds \cos t = g\,dt\,(\cos t - \tfrac{1}{2}\zeta - \tfrac{1}{2}\zeta \cos 2t + \tfrac{7}{8}\zeta\zeta \cos t + \tfrac{1}{8}\zeta\zeta \cos 3t)$$

& in-

& integrando

$$\int ds \cos t = g\,(\sin t - \tfrac{1}{2}\zeta t - \tfrac{1}{4}\zeta \sin 2t + \tfrac{7}{8}\zeta\zeta \sin t + \tfrac{1}{24}\zeta\zeta \sin 3t)$$

Ex his nunc conficietur:

$$P = \frac{1}{c}\,(t - \sin t - \tfrac{1}{2}\zeta \sin t + \tfrac{1}{2}\zeta t \cos t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta t - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \sin t - \tfrac{1}{24}\zeta\zeta \sin 2t)$$

$$Q = \frac{1}{c}\,(1 - \cos t - \tfrac{1}{2}\zeta t \sin t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cos t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \cos 2t)$$

§. XVI. Quoniam nunc in periheliis & apheliis est $Q = \frac{\zeta \sin t}{g}$, hæc planetæ loca pro pluribus sequentibus revolutionibus reperientur ex hac æquatione:

$$\frac{\zeta c}{c} \sin t = 1 - \cos t - \tfrac{1}{2}\zeta t \sin t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cos t - \tfrac{1}{12}\zeta\zeta \cos 2t$$

cui æquationi satisfit, quoties $\sin t = 0$ & $\cos t = 1$; quare valores ipsius t erunt sequentes arcus: 0, 2π, 4π, 6π, 8π, &c. denotante π angulum duobus rectis æqualem, quod indicium est omnes has radices præbere omnium periheliorum loca successiva. Locus ergo perihelii A manet fixus ita ut quoties planeta per rectam S A transit, tum simul soli sit proximus. Est ergo perihelium perinde atque in vacuo immobile, unde si forte absides orbitarum mobiles deprehendantur, causa frustra in resistentia ætheris quæritur. Simili autem modo, quia corpus planetæ a resistentia non de suo plano deflectitur, linea quoque nodorum cujusque planetæ a resistentia non mutabitur. Atque cum resistentia ætheris aphelia & perihelia non de suo loco moveat, idem quoque

quoque valebit, si resistentia concipiatur negativa, hoc est si planetæ ab æthere in gyrum acto propellantur. Hancobrem promotio absidum, siquidem ulla datur, per vorticem ætheris planetas deferentem explicari quoque non poterit.

§. XVII. Quia perihelia perpetuo ad idem cœli punctum referuntur, dubitari omnino nequit, quin etiam aphelia quiescant; eo quod aphelia & perihelia inter se commutari possunt. Attamen videmus aphelium perihelio non e diametro opponi; si enim ponamus angulum $t = 180°$, æquationi inventæ non satisfit, nisi & c simul sit infinitum, seu resistentia prorsus evanescat. Quo igitur aphelii locum facilius inveniamus, æquationem superiorem dividamus per $\sin t$, fietque

$$\frac{\zeta c}{g} = \frac{1-\cos t}{\sin t} - \tfrac{1}{2}\zeta t + \frac{\zeta\zeta(9-8\cos t - \cos 2t)}{12 \sin t}.$$

Est vero $\frac{1-\cos t}{\sin t} = \text{tag.}\, \tfrac{1}{2} t$, & ob $\cos 2t = 1 - 2 \sin t^2$ erit

$$\frac{9-8\cos t - \cos 2t}{\sin t} = 8 \,\text{tag.}\, \tfrac{1}{2} t + 2 \sin t,$$ hincque fiet:

$$\frac{\zeta c}{g} = \text{tag.}\, \tfrac{1}{2} t - \tfrac{1}{2}\zeta t + \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \,\text{tag.}\, \tfrac{1}{2} t + \tfrac{1}{6}\zeta\zeta \sin t.$$

Ponatur nunc $t = \pi - z$, denotante π angulum 180°, eritque z angulus valde parvus, & $\tfrac{1}{2} t = 90° - \tfrac{1}{2} z$; unde habebitur

$$\frac{\zeta c}{g} = \cot \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2}\zeta\pi + \tfrac{1}{2}\zeta z + \tfrac{2}{3}\zeta\zeta \cot \tfrac{1}{2} z + \tfrac{1}{6}\zeta\zeta \sin z.$$

Hic autem ob parvitatem primo termini z & $\sin z$ evanescunt; deinde quia novimus locum aphelii æque ac peri-

helii esse fixum, necesse est ut quoque terminus $\frac{1}{2}\zeta\pi$ excedat, quippe quod re ipsa fieret, si supra quantitatem $\frac{s:c}{c}$ accuratius expressissemus. Hancobrem relinquetur:

$$\cot\tfrac{1}{2}z = \frac{\zeta c}{g(1+\frac{2}{3}\zeta\zeta)} : \text{ seu tag. } \tfrac{1}{2}z = \frac{g(1+\frac{2}{3}\zeta\zeta)}{\zeta c}$$

Verum quia ζ est quantitas valde parva, erit proxime tag. $\frac{1}{2}z = \frac{g}{\zeta c}$ & ob $\frac{g}{\zeta c}$ fractionem minimam erit angulus $z =$

Fig. 2. $\frac{2g}{\zeta c}$. Hinc igitur aphelium, quod sit in A perihelio in P non directe opponitur, sed planeta e perihelio P egressus in aphelium A perveniet, antequam locum perihelio oppositum B attingat; hujusque differentiæ seu anguli ASB tangens erit $= \frac{2g}{\zeta c}$ qui quidem angulus nunquam ultro aliquot minuta secunda exsurgit, ideoque sensibilis esse nequit.

§. XVIII. Ad reliqua phænomena motus planetarum in medio resistente investiganda, consideremus æquationem

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{g} + \frac{\zeta}{g}\cos t + P, \text{ existente}$$

$$P = \frac{1}{c}\left(t - \sin t - \tfrac{1}{2}\zeta\sin t + \tfrac{1}{2}\zeta t\cos t + \tfrac{3}{4}\zeta\zeta t - \tfrac{2}{3}\zeta\zeta\sin t - \tfrac{1}{24}\zeta\zeta\sin 2t\right).$$

Hinc jam quoties planeta in perihelium revertitur, ejus distantia a sole invenietur, si loco anguli t successive ponantur 0, 2π, 4π, 6π, 8π &c. In apheliis autem distantiæ planetæ

planetæ prodibunt, si θ sumatur pro angulo, cujus tangens vel sinus est $= \frac{2g}{\zeta c}$, loco t successive substituendo $\pi-\theta$, $3\pi-\theta$, $5\pi-\theta$, &c. quibus casibus est $\sin t = \frac{2g}{\zeta c}$, $\cos t = -1$; $\sin 2t = \frac{4g}{\zeta c}$ atque $\theta = \frac{2g}{\zeta c}$. Ex his sequentes oriuntur valores:

Si	erit
$t = 0$	$P = 0$
$t = \pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$
$t = 2\pi$	$P = \frac{1}{c}(2\pi + \zeta\pi)$
$t = 3\pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(3\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$
$t = 4\pi$	$P = \frac{1}{c}(4\pi + 2\zeta\pi)$
$t = 5\pi - \theta$	$P = \frac{1}{c}\left(5\pi - \frac{1}{2}\zeta\pi - \frac{4g}{\zeta c}\right)$

Cum igitur pro perihelio sit $\frac{1}{y} = \frac{1+\zeta}{g} + P$, & pro aphelio $\frac{1}{y} = \frac{1-\zeta}{g} + P$,

Si

Si	erit
$t=0$	$\frac{1}{y}=\frac{1+\zeta}{g}+0$
$t=\pi-\theta$	$\frac{1}{y}=\frac{1-\zeta}{g}+\frac{\pi}{c}(1-\frac{1}{2}\zeta)$
$t=2\pi$	$\frac{1}{y}=\frac{1+\zeta}{g}+\frac{2\pi}{c}(1+\frac{1}{2}\zeta)$
$t=3\pi-\theta$	$\frac{1}{y}=\frac{1-\zeta}{g}+\frac{3\pi}{c}(1-\frac{1}{2}\zeta)$
$t=4\pi$	$\frac{1}{y}=\frac{1+\zeta}{g}+\frac{4\pi}{c}(1+\frac{1}{2}\zeta)$
$t=5\pi-\theta$	$\frac{1}{y}=\frac{1-\zeta}{g}+\frac{5\pi}{c}(1-\frac{1}{2}\zeta)$

&c. neglectis scilicet terminis $\frac{4g}{\zeta c}$ præ reliquis incomparabiliter parvis.

§. XIX. Ponamus, postquam planeta primum ex perihelio P est egressus, jam i integras revolutiones esse absolutas, ita ut nunc planeta iterum in perihelio versetur, sitque $t=2i\pi$, erit ergo $\frac{1}{y}=\frac{1+\zeta}{g}+\frac{2i\pi}{c}(1+\frac{1}{2}\zeta)$ & cum terminus posterior præ priori sit valde parvus erit:

$$y=\frac{g}{1+\zeta}-\frac{2i\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}.$$

Pro sequente autem aphelio, ponendo $t=(2i+1)\pi-\theta$ erit $\frac{1}{y}=\frac{1-\zeta}{g}+\frac{(2i+1)\pi}{c}(1-\frac{1}{2}\zeta)$, hincque

$y=$

$$y = \frac{g}{1-\zeta} - \frac{(2i+1)\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$$

fucceffivæ ergo planetæ diftantiæ a fole in perihelio & aphelio fequenti modo diminuentur.

	Diftantia planetæ a fole.
I. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - 0$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$
II. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{2\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{3\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$
III. Perihelium	$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{4\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$
Aphelium	$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{5\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$ &c.

In qualibet ergo revolutione perihelium ad folem propius accedit per intervallum $\frac{2\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$; aphelium vero admovetur intervallo $\frac{2\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$; media ergo diftantia decrefcet intervallo circiter $= \frac{2\pi gg}{c}$; & poft i revolutiones hoc decrementum diftantiæ mediæ erit $= \frac{2i\pi gg}{c}$.

§. XX. Cum igitur poft i planetæ revolutiones fit diftantia perihelii a fole:

 $\frac{g}{1+\zeta}$

$$\frac{g}{1+\zeta} - \frac{2i\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$$

atque ſequens aphelii diſtantia a ſole:

$$\frac{g}{1-\zeta} - \frac{(2i+1)\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$$

his addendis prodibit poſt i revolutiones orbitæ axis transverſus:

$$\frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2} - \frac{\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2},$$

ubi quidem, quia de tempore definito eſt quæſtio, tempus a perihelio ad aphelium omitti poteſt, ita ut poſt i revolutiones habeatur orbitæ axis transverſus $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2}$, quemadmodum etiam initio axis transverſus aſſumtus eſt $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta}$. Deinde ſi diſtantia perihelii a ſole poſt i revolutiones, quæ eſt $= \frac{g}{1+\zeta} - \frac{2i\pi(1+\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1+\zeta)^2}$, a diſtantia aphelii a ſole, quæ eidem tempori conveniret, atque inventa eſt $= \frac{g}{1-\zeta} - \frac{2i\pi(1-\frac{1}{2}\zeta)gg}{c(1-\zeta)^2}$, ſubtrahatur, prodibit diſtantia focorum poſt i revolutiones:

$$\frac{2\zeta g}{1-\zeta\zeta} - \frac{2i\pi\zeta gg(3-\zeta\zeta)}{c(1-\zeta\zeta)^2}$$

quæ ſi per axem transverſum ante inventum dividatur obtinebitur excentricitas orbitæ pro hoc tempore: $= \zeta - \frac{i\pi\zeta g}{c}$,

quæ

quæ initio erat $= \zeta$. A reſiſtentia ergo excentricitas continuo minuitur, orbitæque planetarum propius ad figuram circularem reducuntur.

§. XXI. Ex diminutione axis transverſi ſequitur diminutio temporis periodici. Sit enim T tempus periodicum planetæ initio, Θ vero ſit ejus tempus periodicum, poſtquam jam i revolutiones abſolvit. Quia ergo in una revolutione effectus reſiſtentiæ ſenſibilis eſſe nequit, erit T ad Θ in ratione ſesquiplicata axis transverſi initio, qui erat $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta}$, ad axem transverſum poſt i revolutiones, qui inventus eſt $= \frac{2g}{1-\zeta\zeta} - \frac{4i\pi gg}{c(1-\zeta\zeta)^2}$. Cum igitur horum axium transverſorum ratio ſit ut 1 ad $1 - \frac{2i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}$, erit:

$$T : \Theta = 1 : \left(1 - \frac{2i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 : 1 - \frac{3i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}.$$

Hinc ergo fit $\Theta = T\left(1 - \frac{3i\pi g}{c(1-\zeta\zeta)}\right)$.

Poſt centum ergo revolutiones tempus periodicum cujusque planetæ, quod ante erat $= T$, nunc diminutum erit tempore $= \frac{300\pi g T}{c(1-\zeta\zeta)} = \frac{942,4779\, g T}{c(1-\zeta\zeta)}$. Hoc igitur decrementum temporis periodici primum ipſi tempori periodico erit proportionale. Quocirca decrementa temporum periodicorum, quæ diverſi planetæ eodem temporis tractu ſunt perpeſſa, erunt inter ſe ut valores formulæ $\frac{g}{c(1-\zeta\zeta)}$; unde hæc

decre-

decrementa primo erunt directe ut distantiæ mediæ a sole, tum vero ob $c = \mu a$ reciproce ut diametri planetarum, si quidem eorum corpora sint similiia. Tertio vero decrementa erunt majora, quo excentricitates fuerint majores. Ex quibus concluditur Martem inter omnes planetas maximum temporis periodici sui detrimentum pati debere.

§. XXII. Applicemus hæc, quantum circumstantiæ permittunt, ad motum terræ, ac primo quidem ejus excentricitatem spectemus, unde æquatio maxima pendet. Quodsi autem omnis temporis Astronomos inter se conferamus, ingens quidem discrimen deprehendemus, sed ejusmodi tamen, ut æquatio maxima plerumque a veteribus major sit habita quam a recentioribus. Namque sequentes

Autores	æquationem maximam statuerunt		
Cl. Ptolemæus	2°	23′	0″
Rex Alphonsus	2	10	0
Joh. Newtonus	2	4	47
Keplerus in Tab.	2	3	46
Tycho Brahe	2	3	15
Joh. Maginus	2	3	12
Bullialdus	2	2	41
T. Street	1	59	6
Horroxius	1	59	0
W. Leyburn	1	57	0
Isaac Newton	1	56	20
De la Hire	1	55	42
Cassini	1	55	51
Chev. de Louville	1	54	45
Wurzelbaur	1	57	14

Hic

Hic fere cum decurſu temporis æquatio decreſcere cernitur, præcipue ſi cogitemus non omnes hos autores quantitatem iſtius æquationis ex propriis obſervationibus, ſed ſæpe longe anterioribus concluſiſſe. Parva quidem plerisque his numeris fides haberi poteſt, præſertim antiquiſſimis; verumtamen ſi Tychonis Brahei & Neutoni determinationes reliquis veriores putentur, æquatio terræ intervallo 100 annorum fere 7′ minuta cenſenda eſſet. Cum igitur excentricitas ζ ſit ut 2°, 3′, 15″, foret $\frac{100\,\pi\,g}{c} = \frac{1}{17}$ fere. Hinc autem tempus periodicum uno ſeculo ſexta ſui parte diminueretur, quod cum ſit abſurdisſimum, diminutio iſta æquationis maximæ, ſiquidem tanta locum haberet, alii cauſæ adſcribi deberet.

§. XXIII. Perpendamus ergo tempus periodicum terræ, annique longitudinem præſentem cum præteritis, quantum fieri poteſt, conferamus. Ac primo quidem modus, quo ab Aſtronomis tempus anni determinari ſolet, ita eſt comparatus, ut inde nunquam præſentis cujusvis anni quantitas cognoſci poſſit: niſi enim duo æquinoctia, quorum momenta comparantur, plurium annorum ſpatio a ſe invicem diſtent, ob errores, quibus hujusmodi obſervationes exui nequeunt, nihil certi inde concludi poteſt. Quando igitur Aſtronomi ex collatione duorum æquinoctiorum aliquot ſeculorum intervallo a ſe invicem remotorum quantitatem anni definiunt, hæc determinatio neutri tempeſtati, ſed mediæ cuidam conveniet, ſiquidem errores obſervationum non ſint notabiles. Hinc ergo difficillimum eſt noſſe, quanto tempore nunc terra periodum abſolvat; longe difficilius autem, quanto tem-

tempore terra ante aliquot secula periodum absolverit: quoniam nunc quidem ob sollertiam Astronomorum & summam subsidiorum copiam recentiores observationes veteribus longe sunt anteferendæ. Nunc quidem terra ab æquinoctio ad idem recurrere statuitur tempore $365^{d}, 5^{h}, 48', 55''$; sed quia ad hoc observationes vetustiores sunt usurpatæ, verisimile est annum jam aliquanto breviorem esse. Antiquissimos certe Astronomos non constat defectum anni tropici ab anno Juliano $365^{d}, 6^{h}$ animadvertisse; hincque satis probabile videtur, tum temporis anni longitudinem propius ad istam mensuram accessisse quam nunc. Seculis autem proxime elapsis duratio anni tropici major quam $365^{d}, 5^{h}, 49'$ est credita; unde fortasse a veritate non multum recedemus, si sumamus tempus periodicum terræ singulis seculis quinis minutis secundis minui; neque etiam observationibus repugnaret, si hoc decrementum adhuc majus extaret.

§. XXIV. Ponamus ergo decrementum anni seculare esse $5''$; fietque $\frac{942,4779\, g\, T}{c\,(1-\zeta\zeta)} = 5''$; ubi T denotat annum sidereum seu $31558176''$. Cum igitur exentricitas ζ sit fere $= \frac{1}{60}$, erit:

$$\frac{c}{g} = \frac{31558176 .\ 942,4779}{5 .\ 0,999722},$$

hincque subducto calculo reperietur:

$$\frac{c}{g} = 5950231000.$$

Est vero, si a denotet semidiametrum terræ, $c = \mu a$, & distan-

diſtantia terræ media a ſole $g = 15866\, a$; unde fit $\frac{c}{g} = \frac{\mu}{15866}$; atque

$$\mu = 94406320000000$$

qui valor ſatis prope accedit ad illum, quem ſupra per conjecturam conſtituimus, nempe

$$\mu = 100000000000000,$$

qui valor adhuc minus decrementum produxiſſet. Atque adeo hinc patet reſiſtentiam ab æthere oriundam majorem non eſſe, quam ut cum obſervationibus conciliari queat. Quare cum ex motu planetarum non ſenſibiliter imminuto defectus materiæ cœlum implentis minime ſequatur, hinc graviſſimum argumentum, quo Angli attractionem ſuam tueri conantur, corruit: ſi enim cœlum materia ſubtili eſt repletum, nullam cauſam amplius invenimus, cur gravitatis univerſæ cauſam mechanicam negare velimus. Ceterum ſi terræ tempus periodicum intervallo mille annorum 50″ minuitur, reliquorum planetarum tempora periodica eodem intervallo, quantum ex eorum diametris apparentibus colligi licet, minuentur, ut ſequitur: ♄ 33″; ♃ 15″; ♂ 62″; ♀ 25″ & ☿ 33″.

§. XXV. Cum igitur tam pro terra quam pro reliquis planetis numerus $\frac{c}{g}$ ſit tantopere magnus, diminutio excentricitatis plurimorum ſeculorum ſpatio plane erit imperceptibilis. Namque ſi ζ ponatur pro æquatione maxima: etiamſi æquatio maxima non ſit excentricitati ſimpliciter proportionalis, tamen in parvis differentiis hæc ratio ſatis exacte

locum habet; ſpatio 100 annorum æquationis maximæ decrementum fit $= 314\zeta$. $\frac{g}{c} = \frac{\zeta}{19000000}$ quam proxime. Quare cum ſit $\zeta = 1^\circ, 56', 10'' = 6970''$, integro ſeculo elapſo æquatio maxima minuetur $\frac{697}{1900000}'' = \frac{1}{2720}''$, ita ut demum poſt 2720 ſecula hoc decrementum ad unum minutum ſecundum exurgeret. Deinde etiam ob eandem rationem angulus ASB quo aphelium oppoſitionem perihelii antevertit, omnino erit inſenſibilis. Tangens enim iſtius anguli eſt $= \frac{2g}{\zeta c}$, ideoque pro terra erit: tag. $ASB = \frac{1}{29751155 00\zeta}$

Eſt autem excentricitas $\zeta = 0,01692$, unde erit

$$\text{tag. } ASB = \frac{1}{50338900} = 0,000000019865,$$

ideoque ipſe angulus $ASB = \frac{1}{14643}{}' = \frac{1}{244}{}'' = \frac{1}{4}{}''' = 15^{IV}$.

Fig. 2. §. XXVI. His igitur expeditis reſtaret, ut motum cometarum quoque in medio reſiſtente expenderemus: at formula pro arcu s ſupra inventa tam eſt complicata, ut inde ad nullas certas concluſiones pervenire liceat. Quia autem pro planetis vidimus, eorum tempora periodica eo magis ceteris paribus diminui, quo eorum orbitæ magis ſint excentricæ, hinc ſatis tuto colligimus, tempora periodica cometarum ſatis notabiliter in quavis revolutione diminui debere, ita ut mirum non ſit, cometam 1682 primum poſt intervallum 76 annorum, poſtea vero poſt 75 annos ad perihelium rediiſſe: ſimul vero patet ob hanc perturbationem locum perihelii non mutari debuiſſe.

ENO-

ENODATIO QUÆSTIONIS:

Utrum materiæ facultas cogitandi tribui possit nec ne?

EX PRINCIPIIS MECHANICIS PETITA.

Difficilis est quæstio, atque hoc imprimis tempore maxime agitata, utrum materiæ facultas cogitandi tribui possit, nec ne? Sunt enim, qui statuunt facultatem cogitandi tantopere a natura materiæ abhorrere, ut ne Deus quidem per omnipotentiam materiam cogitantem efficere possit; neque minus absurdum esse existimant, materiam facultate cogitandi præditam concipere, quam circulum quadratum, vel lignum ferreum sibi repræsentare. Alii contra aliter sentiuut, neque tantum discrimen inter corporum proprietates & cogitandi facultatem interesse putant, ut hæc ab illis penitus excludatur: sicque omnino fieri posse affirmant, ut Deus materiæ insuper facultatem cogitandi infundat. Quam opinionem hoc præcipue corroborare conantur, quod essentia materiæ, omnesque ejus proprietates nobis neutiquam

quam usque adeo ſint cognitæ & perſpectæ, ut facultatem cogitandi ipſi denegare valeamus. Neque igitur materiam cogitantem cum circulo quadrangulari, aut cum ligno ferreo comparandam eſſe arbitrantur, ſed potius exempli gratia ſimilem eſſe globo aureo; & quemadmodum globus aureus æque exiſtere poſſit ac non aureus, ita ſimili modo materiam cogitantem æque concipi poſſe, ac non cogitantem.

Ad hanc quæſtionem decidendam primo quidem duplicem viam patere obſervo. Altera requirit completam atque perfectam omnium proprietatum & affectionum, quæ in materiam unquam cadere poſſunt, cognitionem. Si enim omnes materiae proprietates & modos perſpectos haberemus, cogitandi facultas inter eos vel comprehenderetur, vel ſecus: priorique caſu certum foret, materiam cogitare poſſe; poſteriori vero nullum prorſus dubium ſupereſſet, quin materia ad cogitandum plane eſſet inepta. Hoc autem modo nequaquam ſperare licet, iſthanc litem unquam compoſitum iri: quamvis enim quemquam philoſophorum eousque penetrare contingeret, ut quicquid per materiam effici poſſit, perfecte enumerare valeret; hoc ipſum tamen nunquam eruditorum vulgo perſuadebit, ſicque quaeſtionis enodatio tantum penes perſpicaciores perpetuo maneret relicta, neque ullus hinc fructus in vulgus emanaret.

Alteram igitur viam ingredientem ante omnia concedere oportet, noſtram materiae corporumque cognitionem admodum eſſe imperfectam, nosque nonniſi pauciſſimas eorum

rum proprietates atque affectiones nosse. Hinc igitur investigatio eo reducetur, ut hae proprietates cognitae sedulo perpendantur, atque examinentur, utrum facultas cogitandi cum iis consistere possit nec ne? Si enim ista facultas ita deprehendatur comparata, ut uni alterive proprietati corporum cognitae e diametro adversetur, neque sine contradictione cum iis consistere possit; tum utique agnoscendum erit, ne a Deo quidem materiae facultatem cogitandi tribui & infundi posse. Ita si demonstrari posset, tantam esse pugnantiam inter extensionem & cogitationem, ut neutra cum altera simul in eodem ente inesse possit, atque adeo evictum sit, ut quicquid sit extensum, id ad cogitandum prorsus sit ineptum; tum nullum foret dubium, quin eorum opinio, qui materiam facultate cogitandi imbui posse contendunt, everteretur. Sin autem talis repugnantia inter proprietates materiae cognitas & facultatem cogitandi non appareat, tum quidem combinatio hujus facultatis cum corporibus negari non posset; interim tamen minime adhuc affirmare liceret, hujusmodi combinationem esse possibilem. Cum enim non omnes corporis affectiones noverimus, fieri etiamnum posset, ut facultas cogitandi alii proprietati adhuc incognitae adversaretur. Ex quo perspicitur, multo difficilius esse quaestionem propositam affirmare, quam negare: si enim affirmatio veritati esset consentanea, atque materiae revera facultas cogitandi infundi posset, tum nunquam prorsus ad certam hujus veritatis cognitionem pertingere possemus, nisi forte

forte nobis liceret omnes materiæ affectiones nulla omissa perscrutari, & quid iis vel conveniat vel disconveniat, definire. Sin autem quæstionis negatio locum haberet, & facultas cogitandi uni pluribusve materiæ proprietatibus esset contraria, tum ad hoc cognoscendum sufficeret unicam proprietatem, quæ quidem cogitationem excluderet, perspectam habuisse. Cum igitur id, quod in nobis cogitat, anima appelletur, id jam certo affirmare possumus, neminem unquam esse demonstraturum, animam esse materialem, etiamsi forte revera talis esset: at vero animam esse materiæ expertem, siquidem hæc propositio esset vera, ejus demonstrationem jure expectare possumus.

Quæ cum ita se habeant, id solum nobis relinquitur, ut proprietates corporum, quas quidem cognoscimus, diligenter contemplemur, investigaturi utrum facultas cogitandi cum iis conciliari queat, an vero iisdem adversetur? Primum igitur occurrit extensio, quæ corporum proprietas non solum ab omnibus Philosophis agnoscitur, sed etiam a Cartesianis pro essentia corporum habetur: neque quisquam id, quod extensum non est, unquam ad genus corporum referendum putabit. Utrum autem extensio & cogitatio in eodem ente inesse queant, hic non inquiro, cum quod istud examen ad metaphysicas speculationes proprie pertineat, tum vero quod Clariss. Knuzen Prof. Regiomontanus hoc argumentum jam uberrime pertractaverit. Ostendit enim extensionem & cogitationem tantopere invicem pugnare, ut ambae hae qualitates

tates in eodem ente ſimul non magis ineſſe queant, quam rotunditas atque figura quadrata. Quanquam autem ejus demonſtratio ſubverti non poteſt, tamen valde dubito, num eà ejusmodi hominibus, qui metaphyſicis meditationibus non ſunt aſſuefacti, ſit ſatisfactura.

Alia corporum proprietas eſt impenetrabilitas, quæ corporibus quoque ita eſt propria, ut multi Philoſophi non dubitaverint, in ea cum extenſione conjunctim eſſentiam corporum conſtituere. Ac certe nullum extenſum, quod impenetrabilitate careat, pro corpore haberi poteſt; dum enim omnia corpora liberrime transmittit, non ſolum in ſenſus cadere nequit, ſed etiam ab idea ſpatii omni materia vacui neutiquam discrepat. Utrum autem impenetrabilitas facultatem cogitandi excludat, a nemine quantum ſcio, eſt evictum: neque etiam hæc inveſtigatio ſine profundiſſima metaphyſicæ cognitione ſuſcipi poſſe videtur.

Pergo ergo ad tertiam univerſæ materiæ proprietatem æque late patentem, ac binæ jam commemoratæ, quæ etiam multo arctius intimam corporum naturam in ſe complecti videtur. Intelligo vim inertiæ a Keplero primum detectam, tum vero a Newtono ita explicatam, ut totius mechanicæ principia ex ea derivaverit. Cum enim nos tam ratio quam experientia doceat, omne corpus quod quieſcit, perpetuo in quiete permanere debere, niſi extrinſecus ad motum ſollicitetur, neceſſe eſt ut in quovis corpore ratio hujus perſeverantiæ contineatur. Simili autem modo novimus, omne cor-

corpus, quod ſemel in motu fuerit conſtitutum, eundem motum ita conſervare, ut eadem cum celeritate in directum perpetuo ſit progreſſurum, niſi ab impedimentis externis perturbetur. In utroque igitur caſu cernimus vim conſervatricem ſtatus, qua omnia corpora ſunt prædita in eodem ſtatu ſive quietis ſive motus uniformis in directum perſeverandi: hæcque vis inertiæ appellatur. Idea autem corporis hanc vim inertiæ tam neceſſario involvit, ut extenſum, quod inertia careret, neutiquam pro corpore haberi poſſit; in quo omnes Philoſophi præcipue hoc tempore ita inter ſe conveniunt, ut nullum prorſus dubium ſupereſſe poſſit. Maxime autem hoc principium in Mechanica confirmatur ac demonſtratur, ubi omnes motus leges ex hoc ſolo fonte derivantur, omniumque mutationum, quæ in mundo eveniunt, cauſa indidem redditur. Neque etiam hæc corporum proprietas ab iis in dubium vocatur, qui præterea alias vires corporibus affingunt, cujusmodi ſunt vires motrices, vivæ atque activæ, in quibus explicandis philoſophia Wolfiana potiſſimum eſt occupata. Deinde etiam vires attractionis, quæ a maxima parte Philoſophorum Anglorum nunc quidem propugnantur, vim inertiæ non excludunt: atque adeo ii, qui materiam facultate cogitandi imbui poſſe exiſtimant, vim inertiæ denegare non ſolent.

Quo autem clarius indolem hujus corporum proprietatis, quæ vis inertiæ nomen obtinuit, exponam, duos caſus ſpectari conveniet. Alter quo corpus nulla prorſus obſta-

cula

cula offendit, & alter quo extrinſecus impeditur, quominus in priſtino ſtatu perſeverare queat. Priori caſu effectus vis inertiæ in perpetua ejusdem ſtatus conſervatione exeritur; ſi enim corpus quieſcat, per vim inertiæ perpetuo in quiete permanebit; ſin autem undecunque motum acceperit, per eandem vim inertiæ eundem motum uniformiter in directum conſervabit. Altero vero caſu, quo corpus obſtacula offendit, ejusmodi effectus clarius cernitur, ex quo huic proprietati vis nomen proprie convenit: dum enim corpori vis in ſtatu ſuo perſeverandi tribuitur, neceſſe eſt ut eadem vis omni mutationi reluctetur, atque obſtacula, quæ ſtatus ſui conſervationem impediunt, removere conetur. Sic ſi in corpus quieſcens aliud corpus motum impingat, dum illud in quiete perſiſtere annititur, hujus motum arcere conabitur: viciſſim autem dum hoc corpus ob ſuam vim inertiæ motum ſuum continuare conatur, illius ſtatum quietis perturbare conabitur. Quoniam ergo utrumque eſt impenetrabile, fieri omnino nequit, ut utrumque corpus in ſtatu ſuo perſeveret; hincque neceſſe eſt, ut in utroque mutatio oriatur, qua illud quod ante quieverat, in motum conſtituatur, hujus vero motus immutetur: ex quo fonte perturbationes, quæ in colliſione corporum obſervantur, originem ſuam trahunt. Cum igitur in mundo corporum pleniſſimo nullum corpus vel per minimum temporis intervallum motum ſuum continuare poſſit, quin in alia corpora impingat; manifeſtum eſt, in cunctis corporibus perpetuo mutationes

 contin-

contingere oportere, harumque cauſam ex vi cujusque cor-poris in ſtatu ſuo perſeverandi eſſe petendam.

Expoſitis igitur his tribus omnium corporum proprietatibus, quamvis eæ naturam corporum ita exhaurire videantur, ut nulla præterea ineſſe poſſit, tamen largiamur, præter has tres proprietates, plures alias imo innumerabiles dari proprietates, quibus corpora prædita eſſe queant, & quæ nobis prorſus ſint ignotæ. Quo conceſſo, etiamſi has proprietates definire nequeamus, tamen certiſſime affirmare poſſumus, iſtas proprietates neque inter ſe neque cum tribus expoſitis ita pugnare, ut aliæ alias tollant. Sic cum omne corpus ſit extenſum, fieri omnino nequit, ut id ſimul non ſit extenſum; ex quo certo concludere licet, inter innumerabiles illas corporum proprietates nobis incognitas nullam dari, quæ extenſionem tollat. Simili modo harum proprietatum nulla impenetrabilitati contraria eſſe poterit. Atque cum omnia corpora vi gaudeant in ſtatu ſuo perſeverandi, nulla proprietas corporibus convenire poteſt, quæ huic vi adverſetur. Quoniam ergo vi in ſtatu ſuo permanendi directe contraria eſt vis ſtatum ſuum continuo mutandi, manifeſtum eſt, hujusmodi vim corporibus non magis adſcribi poſſe, quam defectum extenſionis aut impenetrabilitatis. Ex hoc fonte facile refutari poſſet vis attractionis, qua Philoſophi Angli corpora prædita eſſe opinantur: cum enim vires ſimili fere modo ſint comparatæ atque colores, quemadmodum corpus, quod certo colore eſt tinctum, ſimul alios colores habere

habere nequit; ita corpus, quod jam unam habet vim determinatam, idem ſimul alias vires induere non poterit. Quamobrem dum omnia corpora vi inertiæ neceſſario ſunt prædita, nulla alia vis in ea ſimul competere poteſt, niſi quæ in ipſa vi inertiæ jam includatur, perſpicuum autem eſt vim attractionis, qua corpora inter ſe remota ſe invicem attrahere concipiuntur, a vi inertiæ maxime eſſe diverſam, neque ex ea originem habere poſſe.

Etſi autem vis inertiæ omnes alias vires prorſus excludit, tamen pro præſenti negotio plus non aſſumam, quam in eodem ente duas vires ſibi e diametro oppoſitas ineſſe non poſſe: ideoque cum omne corpus vi in ſtatu ſuo perſeverandi ſit præditum, in nullo corpore vim contrariam, hoc eſt vim ſtatum ſuum continuo mutandi admitti poſſe.

Quodſi vero facultatem cogitandi vel leviſſima attentione contemplemur, mox deprehendemus eam ſine vi ſtatum ſuum mutandi nullo modo ſubſiſtere poſſe. Quod etiamſi clariſſime evinci poſſet, tamen ſuperfluum foret huic negotio diutius immorari, cum ab aliis jam ſit ſolidiſſime demonſtratum, neque etiam ab iis, qui facultatem cogitandi materiæ infundi poſſe arbitrantur, in dubium vocari ſoleat. Cum igitur facultas cogitandi cum vi ſtatum ſuum mutandi arctiſſime ſit connexa, hujusmodi autem vis in nullo corpore ſine contradictione concipi queat, hinc apertiſſime ſequitur, nullum corpus facultate cogitandi imbui poſſe. Hinc ergo

porro concluditur, quoniam id, quod in nobis cogitare sentimus, anima appellatur, animam non solum non esse materialem, sed etiam esse substantiam a corpore toto cœlo diversam: propterea quod prædita sit vi directe contraria illis viribus, quæ in corporibus inesse possint.

Quo igitur totum hoc argumentum, quo corpori facultas cogitandi negatur, atque immaterialitas animæ demonstratur, brevius contraham; id sequenti ratiocinio includam.

Nullum corpus vim habere potest inertiæ contrariam.

Atqui facultas cogitandi est vis inertiæ contraria,

Ergo nullum corpus facultatem cogitandi habere potest.

Major propositio hujus syllogismi est planissima, nititur enim principio contradictionis, quo eadem qualitas eidem subjecto simul inesse atque non inesse posse negatur. Et qui hanc propositionem negare vellet, is statuere deberet, vim inertiæ in corporibus simul inesse atque non inesse, quod nemo nisi mente captus asseverare ausit.

Minor autem propositio æque est certa: atque firmissimis argumentis corroborari posset, nisi ab omnibus sponte concederetur. Quemadmodum ergo conclusio in dubium vocari possit, neutiquam perspicio: quin potius ejus veritas æque rigorose evicta videtur, atque ullius propositionis pure geometricæ.

RECHER-

RECHERCHES PHYSIQUES SUR LA NATURE

Des moindres parties de la Matiere.

I.

La varieté eſt une proprieté ſi univerſelle & ſi eſſentielle à tous les corps, qu'on n'en ſçauroit trouver deux, qui ſe reſſemblent parfaitement. Dans les corps, qui ſont d'une grandeur conſiderable, cette diverſité eſt ſi manifeſte, que perſonne n'en peut douter: & dans les petits, qui echappent a nos yeux, le microſcope nous decouvre tant de differentes éſpeces, que pluſieurs philoſophes n'ont pas balancé d'etablir la diverſité & la non-reſſemblance comme une loi générale de la nature. En effet cette diverſité s'y trouve non ſeulement dans la figure & dans l'arrangement des parties, mais auſſi les qualités moins eſſentielles different partout ſi conſiderablement, qu'on ne ſçauroit trouver deux corps, quil poſſedent la même qualité dans le méme degré. C'eſt ainſi, qu'on remarque une diverſité presque infinie dans les couleurs; & nous avons lieu de croire, qu'il n'y a pas dans le monde deux corps colorés, qui ſoient parfaitement d'une même nuance. Il en ſera peut-être de même de la dureté, de la molleſſe, du reſſort, & de toutes les autres qualités, qui different presqu'à l'infini dans les

les corps, sur lesquels il nous est permis de faire des experiences. Il semble-même qu'on n'en sçauroit excepter la grandeur: car bien que ce soit une chose, que nous pouvons changer dans la plus part des corps à notre gré, on trouve pourtant tant de difficulté, de rendre par exemple les deux bras d'une balance egalement longs ou également pesans, que lors même qu'on y a reussi en apparence, l'on est pourtant obligé de croire, qu'il s'y trouve encore quelques differences, dont la petitesse seule est cause, qu'elles echappent à nos sens. Mais non obstant cette petitesse, rien n'empeche, que ces choses ne puissent encore varier à l'infini.

2. Quoique cette diversité se trouve aussi bien dans les plus petites particules des corps, que dans les corps mêmes, il n'y a nul doute, que plus les corps sont grands, plus ils seront susceptibles de varieté. Car outre la diversité, qui se trouve dans les moindres particules, leurs arrangemens peuvent changer à l'infini, de sorte que, quand même les moindres particules seroient semblables entr'elles, leurs diverses combinaisons pourroient produire des corps fort differents. Il y a donc deux sources, d'où la diversité des corps resulte, l'une est la diversité des particules mêmes, dont les corps sont composés, & l'autre est la varieté, qui se trouve dans leur arrangement. L'une & l'autre est capable de produire une infinité de variations. Quand même toutes les moindres particules seroient semblables entr'elles, la seule diversité de leur arrangement nous pourroit fournir une infinité de corps tout à fait differens: & s'il n'y avoit qu'une seule maniére d'arranger & de combiner les moindres particules, ce seroit alors à leur difference intrinseque qu'il faudroit attribuer la diversité des corps. Mais comme la diversité, dont les corps sont susceptibles, augmente à proportion de la grandeur de ces corps, on a bien des raisons de douter, si les plus petites, les der-

dernieres molécules de la matiére sont susceptibles de quelque diversité dans leur état. Car n'ayant plus de parties, dont elles soient composées, l'une & l'autre cause de la diversité doit cesser dans ce cas. C'est donc une question bien importante tant dans la physique que dans la metaphysique, de sçavoir si les plus petites particules de la matiere sont toutes semblables entr'elles, ou non? Les philosophes sont fort partagés sur ce sujet: quelques uns soutiennent, que toutes ces dernieres particules different tellement, qu'il n'y en a pas même deux, qui soient parfaitement semblables. D'autres veulent au contraire, qu'elles se ressemblent toutes parfaitement.

3. Il seroit témeraire d'entreprendre la decision de cette question; l'experience nous refusant tout secours pour cela, & la raison seule n'etant pas suffisante pour nous éclaircir sur ce point. Je bornerai donc mes recherches à examiner seulement le rapport, qu'il y a entre l'étendue & l'inertie des moindres molecules de la matiére; car quoiqu'il ne soit pas possible de pousser les experiences jusques là; j'ai pourtant remarqué que l'experience commune aidée de quelques principes incontestables de la raison, nous peut conduire à une conclusion sure, qui ensuite ne manquera pas de nous decouvrir plusieurs autres proprietés de la matiére, sur les quelles nous ne sommes que trop incertains. Newton a demontré presque geometriquement, que les poids des corps sont proportionels à leurs inerties; & comme l'idée de l'inertie ne differe point de celle de la masse, ou de la quantité de matiere, dont un corps est composé, il s'ensuit, que le poids de chaque corps est proportionel à la quantité de matiére, qui y est renfermée; de sorte que plus un corps sera pesant, plus il contiendra de matiere. Ainsi si nous considerons deux boules de la meme grandeur, l'une d'or, & l'autre d'argent, de ce que la

premiere eſt plus peſante que l'autre, nous en concluons ſeurement, qu'il y a plus de matiere renfermée dans la boule d'or, que dans celle d'argent. La peſanteur étant proportionelle à l'inertie, ſera donc une juſte meſure de la quantité de matiere, dont chaque corps eſt composé. La raiſon de cette decouverte depend en partie de l'experience, & en partie du raiſonnement: celle-là nous a fait voir, que tous les corps tombent avec la même viteſſe dans un éſpace vuide d'air; & le raiſonnement nous montre, que pour communiquer à divers corps le même mouvement, il faut abſolument, que les forces ſoient proportionelles aux inerties, c'eſt à dire à la quantité de la matiere de ces corps. Or dans ce cas les forces ſont la gravité, qui rend les corps peſans: par conſequent cette gravité ſera proportionelle à la quantité de la matiere.

4. La gravité ſpecifique eſt le rapport, qu'il y a entre le poids d'un corps & ſon étendue: plus ce rapport eſt grand, plus la gravité ſpecifique ſera grande & reciproquement. Si nous concevons deux corps d'une étendue égale, par exemple chacun d'un pied-cubique, leurs gravités ſpecifiques ſeront entr'elles comme les poids; & c'eſt ainſi, qu'on determine la gravité ſpecifique de tous les corps. Cette circonſtance eſt connue de tout le monde, & lorsqu'on dit abſolument, qu'une matiére eſt plus peſante que l'autre, cela ſe doit entendre de leur gravité ſpecifique, c'eſt à dire, que ſi l'on prend deux volumes égaux de ces deux matieres, le poids du premier ſurpasſera celui de l'autre. Ainſi tout le monde comprend, quand on dit que l'or eſt plus peſant, que l'argent, que cela s'entend des volumes égaux: car perſonne ne diſconviendra, qu'un lingot d'argent de cent livres ne ſoit plus peſant qu'un lingot d'or de cinquante. Dans ce ſens on dit, que le mercure eſt plus peſant que l'eau; que l'eau eſt plus peſante que l'éſprit de vin; & dans ces manieres de parler, chacun voit d'abord, qu'on

ſuppoſe

ſuppoſe des volumes égaux. Or nous trouvons une ſi grande variété parmi les corps par rapport à la gravité ſpecifique, qu'on auroit bien de la peine de trouver deux matieres, qui ſoient également peſantes: & quand même on n'y pourroit pas remarquer la moindre difference, ce neſeroit apparemment-que faute d'inſtrumens aſſes ſubtils pour nous la decouvrir. C'eſt pourquoi, bienque deux lingots d'or du même volume nous ſemblent également péſants, nous avons neanmoins lieu de croire, que leur poid n'eſt pas préciſement le même & que ſi nous avions des inſtruments plus exquis, nous ne manquerions pas d'y obſerver quelque difference. Car comme l'or n'eſt rien moins qu'une matiére ſemblable ou homogéne, il n'eſt pas à préſumer, que toutes ſes parties ayent la même gravité ſpecifique. Cette même reflexion peut être appliquée aux autres metaux, & à toutes les matiéres, qui nous ſemblent homogenes.

5. Puisque l'on peut donc dire avec aſſes de fondement, que tous les corps different par rapport à leur gravité ſpecifique, on demandera ſi la même diverſité ne ſe trouve pas auſſi dans les moindres molecules, dont ces corps ſont compoſés. A regarder cette queſtion en gros, il ſemble d'abord qu'on la devroit affirmer. On pourroit dire, que puisque tous les corps different entr'eux ſelon leur gravité ſpecifique, cette diverſité ne leur vient, que des parties, dont ils ſont compoſés, & que par conſequent ces moindres particules elles mêmes doivent varier à l'infini par rapport à la gravité ſpecifique. On pourroit même pouſſer le principe de la non-reſſemblance ou celui de la raiſon ſuffiſante ſi loin, que de ſoutenir, que la diverſité par rapport à la gravité ſpecifique, ſe trouve auſſi bien dans les moindres particules de la matiere, que dans les corps groſſiers. Mais non obſtant la vraiſemblance de toutes ces raiſons, on ſe trom-

peroit extrêmement, si l'on y vouloit ajouter foi. Car je ferai voir si clairement, que personne ne pourra plus en douter, que toutes les moindres molecules, qui composent les corps, qui nous environnent, sont egalement pesantes, ou qu'elles ont toutes la même gravité specifique. On regardera peut être dabord cette proposition, comme un grand paradoxe, & les Metaphysiciens qui étendent l'inégalité universelle jusqu'aux élemens mêmes de la matiere, seront bien surpris que l'identité de pesanteur specifique se puisse trouver, non dans les élemens, mais generalement dans toutes les moindres particules de la matiere même, qui sont encore bien éloignées de ces elemens, comme je ferai voir bien tôt. J'espére de demontrer ce, que je viens d'avancer, assès rigoureusement, pour être dispensé, de repondre aux objections, qu'on me pourroit faire; & je me contenterai d'avoir decouvert une si belle proprieté de la matiere, qui pourra nous en decouvrir peutêtre plusieurs autres, si l'on ne se précipite point dans ses raisonnemens.

6. Avant que d'entreprendre la demonstration de ce paradoxe, il faut que j'explique plus clairement, ce que j'entend sous le nom des moindres particules des corps, & cette explication nous ménera à la demonstration même. Chaque corps a une certaine quantité de matiére, qui lui est propre, & qui constitue pour ainsi dire l'être du corps; ce sont les parties, qui se meuvent conjointement avec le corps, & dont la pesanteur produit le poids du corps même. Il faut donc distinguer cette matiére propre à chaque corps de celle, qui pénétre librement à travers ses pores, & qui remplit conjointement avec les parties propres l'espace, que le corps occupe. Ainsi tout le monde sçait distinguer les parties de l'air, qui se trouve dans les pores d'un éponge d'avec les parties de l'éponge même. Et comme il n'y a nul doute, que le monde ne soit rempli d'une matiere fluide, élastique & très subtile, qu'on

qu'on nomme l'éther, les pores des corps feront pénetrés de cette matiere fubtile, qui par confequent occupera une bonne partie de l'éfpace, que les corps nous paroiffent remplir. Cette matière, quoique comprife entre les mêmes bornes, qui terminent le corps, ne doit donc pas être cenfée appartenir au corps même: c'eft pourquoi je la nommerai étrangére, pour la diftinguer de la matiére propre des corps, auffi bien que les autres matieres fluides tant vifibles qu'invifibles, qui fe pourroient trouver dans la cavité des pores.

7. Que la gravité de tous les corps, qui environnent la terre, ait une caufe phyfique, ou qu'il y ait une force mechanique, qui les pouffe en-bas: c'eft ce que je me puis bien difpenfer de prouver ici, quoique la veritable caufe nous en foit encore inconnue en detail. Mais en general il eft certain, qu'il y a une matiere extrêmement fubtile, qui par fon mouvement eft douée d'une force capable de pouffer les corps en bas, & de produire tous les phénoménes de la gravité. Il m'importe peu, que cette matiére foit l'ether lui meme ou non? fes éffets nous montrent clairement qu'elle eft extrémement fubtile; puisque nulle experience n'eft capable de nous la faire fentir, ou d'en altérer les effets. Donc tous les corps, entant qu'ils font péfans, feront pénétrés de cette matiére fubtile, qui par confequent traverfe librement leurs pores. Mais comme les corps ne font pas des pores dans toute leur étendue, & qu'ils renferment auffi une matiére, qui leur eft propre; il eft clair qu'il doit y avoir dans chaque corps des particules deftituées de pores, par où la matiere fubtile, qui produit la gravité, ne fçauroit paffer; & ce font ces moindres particules des corps, dont je parle ici. Je ne dis pas, que ces particules n'ayent point du tout des pores; peut être en ont elles encore, mais de fi petits que la matiere fubtile, dont je parle, n'y fauroit paffer. Ces particules feront donc d'une gran-

deur finie, par consequent composées de parties plus petites encore, & ainsi bien differentes de celles, qui sont comprises sous le nom d'élemens. Le terme de molecule sera le plus propre à designer ces petites particules des corps: & partant chaque corps est composé d'un certain nombre de molecules, qui constituent sa matiére propre, & qui par leur arrangement forment des pores, par où la matiere subtile, qui renferme la cause de la pesanteur, peut librement passer.

8. Le poids d'un corps n'est donc autre chose, que la somme de toutes les forces, dont ses molécules sont poussées en bas: & par ce, que nous avons prouvé dessus de la pesanteur, il est clair aussi, que les forces dont les molecules sont poussées, doivent être proportionelles à l'inertie de ces molecules, où á la quantité de matiere, qu'elles contiennent. Or de quelque maniere que nous nous imaginions la cause de la gravité, comme elle est l'effet de la pression d'un fluide; la force avec laquelle chaque molecule est poussée, sera toujours proportionelle à l'étendue ou au volume de cette molecule. Car c'est une regle générale de l'hydrostatique, que les fluides agissent selon les volumes: un corps submergé dans l'eau est constamment poussé par une force égale à celle d'un volume égal d'eau, mais dans une direction contraire. De là vient que les corps enfoncés dans l'eau perdent une partie de leur poids, & que cette partie perdue est toujours proportionelle au volume. Cette même loi a lieu dans tous les fluides, qui agissent par pression, de quelque nature qu'ils soient; & tous ceux qui ont entrepris d'expliquer la cause de la pesanteur, quelques differentes que soyent leurs hypotheses, sont pourtant tous d'accord sur cet article, que les derniéres molecules de la matiére, qui soutiennent la force de la gravité, sont poussées par des forces proportionnelles à leurs volumes. Ainsi deux molécules de volu-

volumes égaux, feront auſſi également peſantes, & ſi ces molecules ſont inegales par rapport au volume, leurs poids differeront dans la même proportion.

9. Ayant donc demontré plus haut, que les poids des molecules ſont proportionels à l'inertie, ou à la quantité de matiere que chaque molecule contient; il s'enſuit que dans les molecules la quantité de matiére eſt conſtamment proportionelle a leurs volumes; de ſorte que ſi ces molecules étoient égales en étendue, elles le ſeroient auſſi par raport à la quantité de matiere, dont elles ſont compoſées; & même encore par rapport à leur peſanteur. On appelle denſité le rapport, qu'il y a entre la quantité de matiere qu'un corps renferme, & ſon étendue; & l'on dit, que deux corps ſont également denſes, lorsqu'ils contiennent d'égales portions de matiere ſous des volumes égaux: ou ce qui revient au même, lorsque les poids ſont en raiſon des volumes. Enſuite un corps eſt dit plus denſe, lorſqu'il contient plus de matiére ou plus de poids ſous le même volume. Puis donc que toutes les molecules, dont les corps ſont compoſés, peſent en raiſon de leurs volumes auſſi bien qu'en raiſon de leurs maſſes: elles auront toutes la même gravité ſpecifique, & ſeront auſſi toutes également denſes. Or comme la peſanteur dans le degré, où nous l'obſervons, n'eſt qu'une proprieté des corps, qui ſe trouvent à la ſurface de la-terre, & que le même corps changeroit de péſanteur, s'il étoit transporté dans un autre endroit; il eſt clair que la peſanteur ne nous marque point une proprieté fixe des corps. C'eſt pourquoi, quand je dis, que les molécules ou les moindres particules des corps péſent en raiſon de leurs volumes, il faut ſouſentendre cette condition, lorſqu'elles ſe trouvent à peu près à la même diſtance du centre de la terre. Mais quand je dis, que les maſſes (ou les quantités de matiere) des molecules ſont pro-

proportionelles à leurs volumes, c'eſt une propoſition générale, qui n'eſt plus attachée à une certaine ſituation; puiſque la diverſité du lieu n'en ſçauroit rien changer, ni à la quantité de matiére, ni à l'étendue des molecules. C'eſt donc une verité ſuffiſamment prouvée, que toutes les molecules des corps ſont également denſes; & que l'inegalité de denſité, qu'on obſerve dans tous les corps groſſiers s'évanouit tout à fait dans les molecules, dont tous les corps ſont compoſés.

10. Quelque difference donc qu'il y ait par rapport à la denſité ou à la gravité ſpecifique dans les corps, qui nous environnent il eſt pourtant certain, que toutes les molecules, dont ils ſont compoſés, ont la même gravité ſpécifique, ou pour parler plus préciſement, la même denſité. Par conſequent quoique l'or ſoit le corps le plus peſant & le plus denſe, que nous connoiſſions, on peut neanmoins aſſeurer, que les molecules, qui le compoſent, ne ſont pas plus peſantes ou plus denſes, que celles, qui compoſent l'eau, ou l'air, ou même les corps les plus legers. Il ne peut donc y avoir d'autre raiſon, pourquoi l'or eſt plus peſant que les autres corps, ſi ce n'eſt, parce qu'il renferme ſous le même volume une plus grande quantité de molecules. Or comme l'or a encore une grande quantité de pores, s'il étoit poſſible de le comprimer au point, que toutes ſes molecules ſe touchaſſent exactement l'une l'autre, & qu'il n'y eut plus d'intervalles entr'elles; il eſt évident qu'il deviendroit encore bien plus denſe & plus peſant, qu'il n'eſt actuéllement. Mais dans cet état ſa gravité ſpecifique ſeroit préciſement la même que celle des molecules; d'où il s'enſuit, que la gravité ſpécifique des molecules doit de beaucoup ſurpaſſer celle de l'or. Suppoſons que les pores de l'or occupent la moitié du volume; la gravité ſpecifique des molecules, dont tous les corps ſont compoſés, ſera deux fois plus grande que celle de l'or. Mais nous avons lieu de

de croire, que les pores de l'or occupent une beaucoup plus grande partie de tout le volume, que la moitié: donc la gravité ſpecifique ou la denſité des molecules, ſera pluſieurs fois plus grande que celle de l'or. Comme l'eau eſt environ 19 fois plus legere que l'or, ſi nous nous arretons à la premiere ſuppoſition, ce ne ſera que la 38^{me} partie du volume, que l'eau occupe, & qui ſera remplie de molecules, tout le reſte ſera ou vuide, ou rempli d'une matiere étrangére, qui ne fait pas partie de l'eau. Et dans l'air, qui eſt 800 fois plus leger que l'eau, il n'y aura que la 30400^{me} partie de ſon volume, qui contienne la matiere qui eſt propre à l'air.

11. Ce raiſonnement, que nous avons tiré de la nature de la peſanteur, nous fait voir ſeulement, que les molecules des corps, qui environnent la terre, & qui peſent vers elle, ſont toutes également denſes: & on pourroit encore douter, ſi la même proprieté s'etend auſſi aux corps, qui ſe trouvent dans les entrailles de la terre, ou à ceux qui conſtituent les autres corps celeſtes. Mais comme nous n'avons nulle raiſon de douter, que la peſanteur ne ſuive la même loi dans toutes les planetes, qu'elle obſerve autour de la terre, nous devons conclure, que tous les corps de chaque planete ſont compoſés de molecules pareillement égales par rapport à la denſité. Et tous les corps celeſtes êtant ſollicités par des forces, qui ſuivent une loi générale; en leur appliquant le raiſonnement, que je viens de faire, on reconnoitra, que non ſeulement les corps de la terre, mais auſſi ceux qui ſe trouvent dans les planetes & même dans les cometes, doivent tous être compoſés de molecules également denſes. Il regnera donc partout dans toutes les molecules des corps la même denſité; ce qui eſt d'autant plus ſurprenant, que d'ailleurs dans tout le monde la nature nous paroit affecter une diverſité infinie. Mais peut être que cette uniformité eſt une ſuite neceſſaire de l'eſſence de la matiére, & que ſi nous la connoiſſions plus parfaitement, nous ne manque-

rions pas de voir, que ce degré de densité est aussi essentiel à la matiere, qu'il l'est à un triangle, que ses angles ensemble soient égaux a deux droits.

12. Mais examinons un peu de plus près l'etat de ces moindres particules des corps, que nous avons nommé molecules & qui soutiennent les impressions de la matiére subtile, cause de la pesanteur. Comme cette matiere ne trouve plus de passages par ces molecules, ou elles n'auront point du tout de pores, ou si elles en ont, ces pores seront trop petits ou trop étroits pour donner passage à la matiére subtile: d'où resulte cette question: si les molecules des corps sont tout à fait solides, ou si elles ont des pores? Si l'on dit, qu'elles ont des pores, on sera obligé de dire, puisque toutes les molecules sont également denses, qu'il se trouve dans chaque molecule la même raison entre l'espace rempli de matiere, & celui qui est occupé par les pores. Or non seulement nous ne voyons aucune raison d'une telle disposition générale, mais plutôt l'experience nous apprend, que dès qu'il y a des pores dans les corps, le rapport entre les pores & la partie solide varie à l'infini. On peut encore moins dire, que ces molecules soient des pieces organisées, & composées de plusieurs parties, car il seroit impossible, que l'organisation de chacune fut telle, que le rapport entre la partie solide & poreuse dèmeurat toujours le même. Soutenons donc le premier & disons, que toutes lés molecules sont parfaitement solides, & tout à fait destituées de pores. Elle seront donc de petites masses solides, & puisque toutes leurs parties ont la même densité, on les pourra considerer comme parfaitement homogenes ou composées d'une matiere similaire. Cela étant, on ne pourra imaginer aucune autre difference parmi ces molécules, si non, par rapport à leur grandeur & à leur figure, dont ni l'un ni l'autre ne sçauroit rien changer dans leur essence. Au reste il n'y a aucun doute, que ces particules ne soient extremement petites, & que leur petitesse passe notre imagination;

gination; toutes fois, bien qu'elles n'aient plus de pores, qui marquent une composition des parties, on auroit grand tort de soutenir, que ces particules soient tout à fait indivisibles; car ayant encore une grandeur finie, la divisibilité leur doit convenir necessairement, quoiqu'elles ne soient pas subdivisées en effet.

13. Ce que je viens de dire ne regarde, que les corps pésants & leurs parties, & il n'en sera peut être pas de même des corps, qui n'ont aucune pesanteur, je veux parler de la matiére subtile même, qui cause la pesanteur. Il paroit d'abord fort vraisemblable, qu'il doit y avoir une grande difference entre la matiere, qui cause par ses pressions continuelles la pesanteur, & entre celle, qui en reçoit les impressions. Cependant ce fluide, quelque subtil qu'il soit, sera pourtant materiel, & s'il étoit de l'essence de la matiére d'avoir un certain degré de densité, il faudroit dire, que les particules de cette matiere subtile seroient aussi denses que les molecules des corps. Si l'on vouloit ensuite soutenir, que tout le monde est parfaitement rempli de matiere, & qu'il n'y a point du tout de vuide, tout l'espace seroit rempli d'une matiere partout également dense, & même plus dense, que l'or; ce qui rendroit fort difficile, pour ne pas dire impossible, l'explication du mouvement. Car quoiqu'il n'y ait qu'une petite partie des corps, qui soit pesants, & qui se fasse sentir par les phenomenes; l'autre partie, à cause de sa très grande densité, ne laisseroit pas de resister au mouvement; or nous ne remarquons presque pas la moindre resistance, par laquelle le mouvement des corps soit diminué, dés que nous avons oté la resistence des corps pesans, comme de l'air. Cette consideration nous oblige donc de dire, ou qu'il y a du vuide dans le monde, & que même la plus grande partie de l'espace ne contient aucune matiére; ou que la matiére subtile, qui cause la pesanteur, est d'une espéce tout à fait differente de celle, dont les corps pesants sont composés.

14. En embrassant le premier sentiment nous gagnerons fort peu. Car si nous disons que les particules de cette matiére subtile sont aussi denses ou épaisses, que les molecules des corps, nous serons obligé, de separer les particules de la matiere subtile si loin les unes des autres, pour obtenir un vuide suffisant à expliquer le mouvement, que nous ne saurions plus concévoir, comment la pesanteur pourroit être produite par une telle matiere. Car il est incontestable, que le fluide, qui cause la gravité, doit être extrémement comprimé: mais comment pourra-t-on accorder un tel état de compression, avec des particules dissipées & éloignées les unes des autres. Il ne nous reste donc que l'autre sentiment, en vertu duquel nous soutiendrons, que la matiere qui constitue le fluide subtil, cause de la pesanteur, est d'une nature tout à fait differente de la matiere, dont tous les corps sensibles sont composés. Il y aura donc deux espéces de matiere, l'une qui fournit l'étoffe à tous les corps sensibles, & dont toutes les particules ont la même densité, qui est très considérable, & qui surpasse même de plusieurs fois celle de l'or: l'autre espece de matiere sera celle, dont ce fluide subtil, qui cause la gravité, est composé, & que nous nommons l'éther. Il est probable, que cette matiere a pareillement partout le même degré de densité, mais que ce dégré est incomparablement plus petit, que celui de la premiere éspece. Non seulement le raisonnement tiré de la possibilité du mouvement, nous prouve cette extrême rareté de la seconde espece de matiere, mais aussi la propagation de la lumiere, qui se fait sans doute par ce même fluide subtil, nous fait voir, que sa densité doit être plusieurs mille fois plus petite que celle de l'air, & par consequent plusieurs millions de fois plus petite que la densité des molecules dont les corps grossiers sont composés.

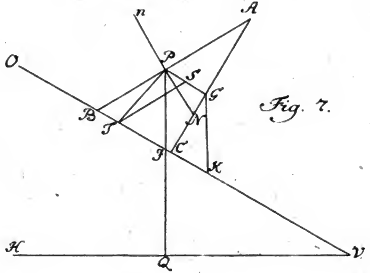


Fig. 7.

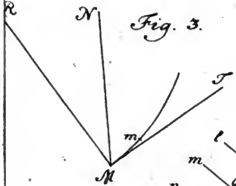


Fig. 3.

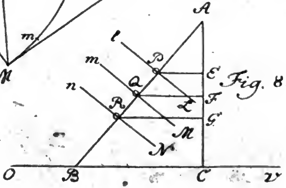
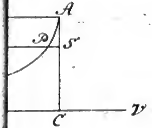


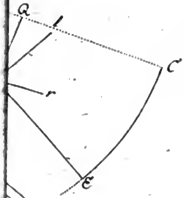
Fig. 8.

Euler: Opusc:

5 10 451

Tab. II. 303





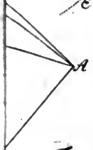


Fig. 14.

Frisch sc.

5 10 451 305

III.

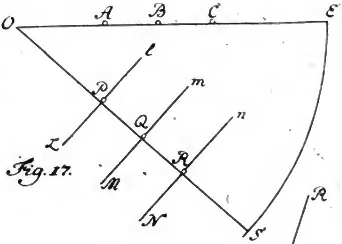


Fig. 17.

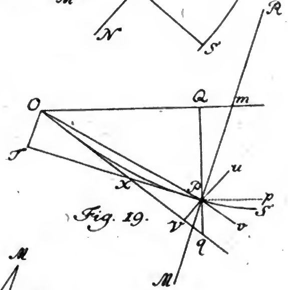


Fig. 19.

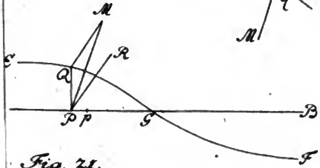


Fig. 21.

Frisch sc.

b. IV.

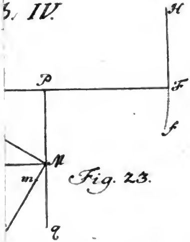


Fig. 23.

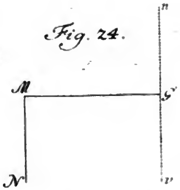


Fig. 24.

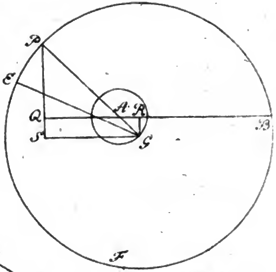


Fig. 27.

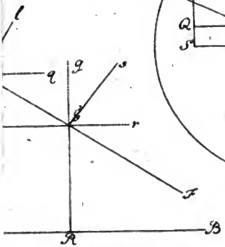


Fig. 25.

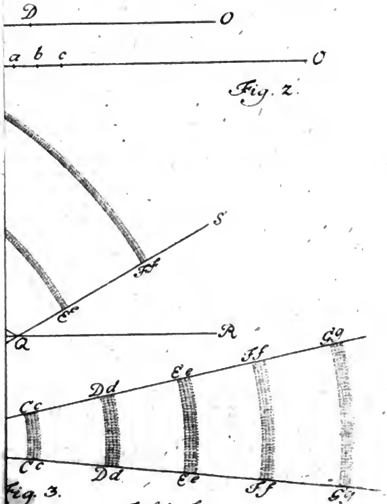
uler. Opusc:

Frisch sc.

5 10 451

Tab. V.

309



Frisch sc.

VI.

—B

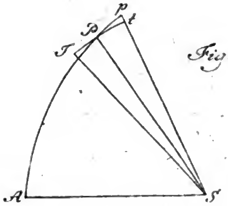


Fig. 1.

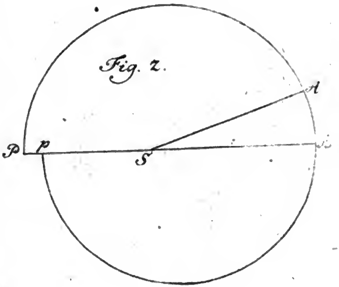


Fig. 2.

Opusc.

Frisch sc.